Navier Stokes Equation-The Basic Approaches

Prof. Young-Ho LEE, Ph.D., Div. of Mechanical Eng.

KOREA MARITIME UNIVERSITY
lyh@hhu.ac.kr, http://www.pivlab.net

1. 粘性流体의 性質

1-1. 점성유체의 역사

- 유체의 전단력(shearing force)은 전단에 의한 변형속도 (rate of shearing deformation)에 의존, 유체의 경우에는 속도구배(velocity gradient)에 해당함.
- 속도구배가 존재하는 유동장에서는 흐름에 저항하는 힘이 발생하며, 이와 같은 저항하는 성질을 점성(viscosity)이라고 정의함.
- Archimedes (B.C 278 – 212) : 浮力에 관한 연구

  Leonardo da Vinch (1452 – 1519) : 파동, 와의 발생, 유선형 물체의 저항감소 등.

1. 粘性流体의 性質

Newton : 1687년에 전단력이 속도구배에 비례함을 발견.

⇒ 물, 공기 등의 점성유체를 Newton 유체로 부르는 이유.

Bernoulli, Hagen, Darcy, Weisbach, Reynolds :

(18-19세기) 점성에 관한 실험적 연구에 공헌.

Euler : 1755년, 점성을 무시한 이상유체에 관한 Euler의

운동방정식을 제안 (수학적 해석 : 水力學과는 무관계)

Navier(1827),Cauchy(1828),Poisson(1829),Stokes(1845) :

Euler 방정식에 점성항을 더한 이론적 연구

⇒ *Navier-Stokes방정식*

(수학적으로 난해, 엄밀히 70개 전후) : 당시의 평가는 낮음.

1. 粘性流体의 性質

Prandtl(1904) : 물체 근방에 한해서 점성을 고려하는 경계층 이론 수립

- D'Alembert's paradox(1752)를 해결.

Blasius, Pohlhausen, Karman, Taylor : 경계층 이론 확립, 亂流이론의 진보와 함께 현재의 공학상 문제해결에 많은 공헌을 함.

1-2. 유체의 점성

실제유체내에서 운동하는 물체에는 반드시 항력(抗力,drag)이 작용.

<u>管內 및 流体機械의 유동현상에는 필연적으로 압력손실을 동반함.</u>

大部分은 점성에 의한 流体摩擦 및 흐름의 박리(剝離, separation)에 기인함.

a. 유체 및 고체표면에 작용하는 유체마찰을 分子運動의 입장에서 설명:

i) 유체의 분자는 흐름방향의 평균적인 전진운동 외에 미시적으로는 불규칙한 열운동(열진동)을 동반함.

1. 粘性流体의 性質

ii) 속도구배가 존재하는 흐름에서는 유체입자표면에서의 충돌에 의해 運動量교환이 행해지고, 운동량의 변화는 입자가 받는 힘에 해당함. 즉, 운동량증감에 대응하는 힘이 점성에 의한 전단력임.

iii) 전단력은 유체의 변형운동에 관계하며, 면에 접하는 방향으로 작용.

iv) 전단응력(shearing stress): 단위면적당의 전단력.

v) 마찰항력 : 물체표면에 작용하는 전단응력의 적분치.

vi) 운동량은 충돌전후에 보존되나, 完全衝突이 아닌 경우에는 전체의 운동에너지는 감소 : 분자의 열운동에너지로 변환되어 비가역과정(irreversible process)이 됨 : 유체의 운동에너지가 열에너지로 변환되어 에너지손실(압력손실)

1. 粘性流体의 性質

<table>
<tr><td></td><td>충돌전</td><td>$u_1 \langle u_2$
$u_1+\delta u \langle u_2$</td><td>충돌후</td></tr>
<tr><td>운동량</td><td colspan="2">u_1, u_2, m</td><td>$u_1+\delta u,\ u_2-\delta u, m$</td></tr>
<tr><td>운동에너지</td><td colspan="3">$\frac{1}{2}m(u_1^2+u_2^2) \rangle \frac{1}{2}m\left\{(u_1+\delta u)^2+(u_2+\delta u)^2\right\}$
$=\frac{1}{2}m(u_1^2+u_2^2)-m\delta u\left\{u_2-(u_1+\delta u)\right\}$</td></tr>
</table>

b. 層流(laminar flow) : 유체입자간의 운동량교환이 분자의 열운동에 의해 이루어지는 흐름.

c. 粘性係數(coefficient of viscosity) : 층류의 경우, 전단응력과 속도구배간의 유체고유의 관계를 결정짓는 물성치.

$$\tau = \mu \times \gamma$$

τ : 전단응력(N/m^2, Pa), μ : 점 성 계 수 (N.s/m^2, Pa.s)

γ 전단변형속도 예를들어, $\left(\gamma_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \, 1/s \right)$

(1-1)

d. Newton 유체(Newtonian fluid) :

式(1.1)에 따르는 유체 ↔ non-Newtonian 유체(rheology)

e. 기체는 온도가 상승하면 점성계수가 커진다. : 평균자유행정이 크므로 분자간의 운동량교환이 분자의 열운동에 의존, 열운동은 온도상승과 함께 증대.

f. 액체의 경우에는 평균자유행정이 짧아 운동량교환이 분자相互의 접촉시간에 의존. 곤온 ↔ 열운동증대 → 접촉시간단축 → 분자응집력 감소 → 점성계수감소.

※平均自由行程 λ(mean free path) : 분자가 1회의 충돌시점에서 다음의 충돌이 있기까지 이동한 거리의 평균치.

공기 : 500m/s/800 $\times 10^9 \simeq$ 60mm

g. 動粘性係數 (kinematic Viscosity) : ν[/s]

ν = μ / ρ, ρ : 밀도(kg/) (1-2)

표1 . 액체의 점성($1.0133\times10^5 N/m^2$=1 기압)

액체의 종류	온도 (℃)	점성계수 $\mu(N\cdot s/m^2)$	동점성계수 $\nu(m^2/s)$
물	0	1.783×10^{-3}	1.783×10^{-6}
	20	1.002×10^{-3}	1.004×10^{-6}
	40	0.651×10^{-3}	0.656×10^{-6}
	100	0.283×10^{-3}	0.296×10^{-6}
가솔린	20	0.31×10^{-3}	0.46×10^{-6}
경유	20	2.0×10^{-3}	2.4×10^{-6}
스핀들	60	4.17×10^{-3}	4.95×10^{-6}
글리세린	20	14.90×10^{-3}	11.80×10^{-6}
수은	20	1.55×10^{-3}	0.115×10^{-6}
NaK	100	0.546×10^{-3}	0.616×10^{-6}

[주] 10^{-3} $N.s/m^2$ $=10^{-3}$ Pa.s=1mPa.s

1-3. 流体의 운동과 변형

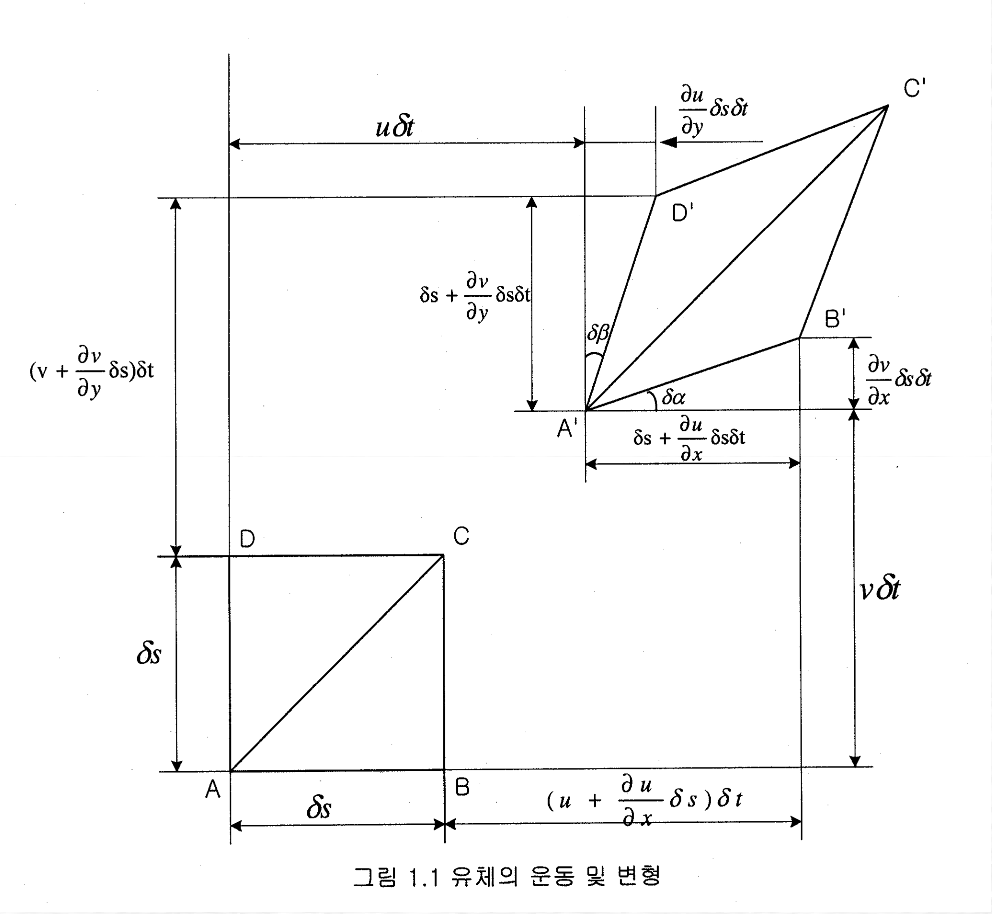


그림 1.1 유체의 운동 및 변형

1. 粘性流体의 性質

일반적으로 유체역학에서 취급하는 유동은 분자간의 평균 자유행정이 유체중의 물체나 유로 등의 대표寸法에 비교해서 대단히 작은 일련의 연속체로 간주함. 유동장의 임의의 점 A(x, y, z)의 유체의 유속(u, v, w)이 시간후 점 A´ 에 이동하여 속도가(u', v', w')로 변화하였을 경우에 관계하는 유체의 운동과 변형을 고찰 (그림 1.1 참조)

a. u',v',w'를 Taylor 전개하여 2차이상의 항을 생략하여 정리하면,

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\delta z = u + \varepsilon_x \delta_x + \frac{1}{2}\left(\gamma_z \delta y + \gamma_y \delta z\right) + \frac{1}{2}\left(\eta \delta z + \zeta \delta z\right) \tag{1-3}$$

같은요령으로,

$$v' = v + \varepsilon_y \delta_y + \frac{1}{2}\left(\gamma_x \delta z + \gamma_z \delta x\right) + \frac{1}{2}\left(\zeta \delta x + \zeta \delta z\right)$$

$$w' = w + \varepsilon_z \delta_z + \frac{1}{2}\left(\gamma_z \delta x + \gamma_x \delta y\right) + \frac{1}{2}\left(\zeta \delta y + \eta \delta x\right)$$

단, $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$: 신축에의한 변형속도 (1-4)

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \gamma_y = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

: 전단에 의한 변형속도 (1-5)

$$\zeta = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \eta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

: 剛体회전각속도의2배

: 渦度 (vorticity) (1-6)

b. 미소정방형 ABCD의 각 頂點에서의 속도는 Taylor 전개에 의해

vA=(u ,v)

$$v_B = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\times\delta s + \frac{\partial u}{\partial y}\times\delta s,\ v + \frac{\partial v}{\partial x}\times\delta s + \frac{\partial v}{\partial y}\times\delta s\right) \qquad (1\text{-}7)$$

$$v_C = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\times\delta s + \frac{\partial u}{\partial y}\times\delta s,\ v + \frac{\partial v}{\partial x}\times\delta s + \frac{\partial v}{\partial y}\times\delta s\right)$$

$$v_D = \left(u + 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\times\delta s,\ v + 0 + \frac{\partial v}{\partial y}\times\delta s\right)$$

ABCD는 δt 시간후 A'B'C'D'로 변형(원점A)

$$A' = A + \delta t v_A = (u\delta t,\ v\delta t)$$

$$B' = B + \delta t v_B = (\delta s + (u + \frac{\partial u}{\partial x} \times \delta s) \times \delta t, v\delta t + \frac{\partial u}{\partial x} \times \delta s \times \delta t)$$

$$C' = C + \delta t v_C = (\delta s + (u + \frac{\partial u}{\partial x} \times \delta s) \times \delta t, v\delta t + \frac{\partial u}{\partial y} \times \delta s \times \delta t) \qquad (1\text{-}8)$$

$$D' = D + \delta t v_D = (u\delta t + \frac{\partial u}{\partial y} \times \delta s \times \delta t, v\delta t + \frac{\partial v}{\partial y} \times \delta s \times \delta t)$$

c. 신축에 의한 변형속도 :단위시간당의 신축率 : ε선분의 x방향의 신축율은

$$\left[\left(\delta s + \frac{\partial u}{\partial y} \times \delta s \times \delta t \right) - \delta s \right] / \delta s = \frac{\partial u}{\partial x} \times \delta t$$

$$\therefore \ \varepsilon_c = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (1\text{-}9)$$

1. 粘性流体의 性質

d. 전단에 의한 변형속도 : 단위 시간당의 각도변화량 : γ

각도변화량은, ∠BAD − ∠B'A'D' = δα + δβ

$$w' = w + \varepsilon_z \delta_z + \frac{1}{2}\left(\gamma_z \delta x + \gamma_x \delta y\right) + \frac{1}{2}\left(\zeta \delta y + \eta \delta x\right)$$

$$\delta\alpha \fallingdotseq \tan\delta\alpha \fallingdotseq \frac{\partial v}{\partial x} \times \delta s \times \delta t / (1 + \frac{\partial u}{\partial x} \times \delta t) \fallingdotseq \frac{\partial v}{\partial x} \times \delta t / (1 + \frac{\partial u}{\partial x} \times \delta t)$$

$$\delta\beta \fallingdotseq \tan\delta\beta \fallingdotseq \frac{\partial u}{\partial y} / (1 + \frac{\partial u}{\partial y} \times \delta t)$$

정의에의해, $\displaystyle \lim_{\delta t \to 0} \frac{\left(\delta\alpha + \delta\beta\right)}{\delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \therefore \gamma_z = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ (1-10)

e. 渦度(Vorticity) : 강체회전각속도의 2배 : ω(ξ,η,ζ) 미소정방형의 대각선 AC의 회전각 δΩ는

$$\delta\Omega = \delta\alpha + \angle B'A'C' - \angle BAC = \angle CAD - \angle C'A'D - \delta\beta$$

$$= \frac{1}{2}(\delta\alpha - \delta\beta) + \frac{1}{2}(\angle B'A'C' - \angle BAC) + \frac{1}{2}(\angle CAD - \angle C'A'D')$$

만일 유체입자가 변형하지 않고 강체와 같이 회전한다면,

$$\angle BAC = \angle B'A'C', \angle CAD = \angle C'A'D')$$

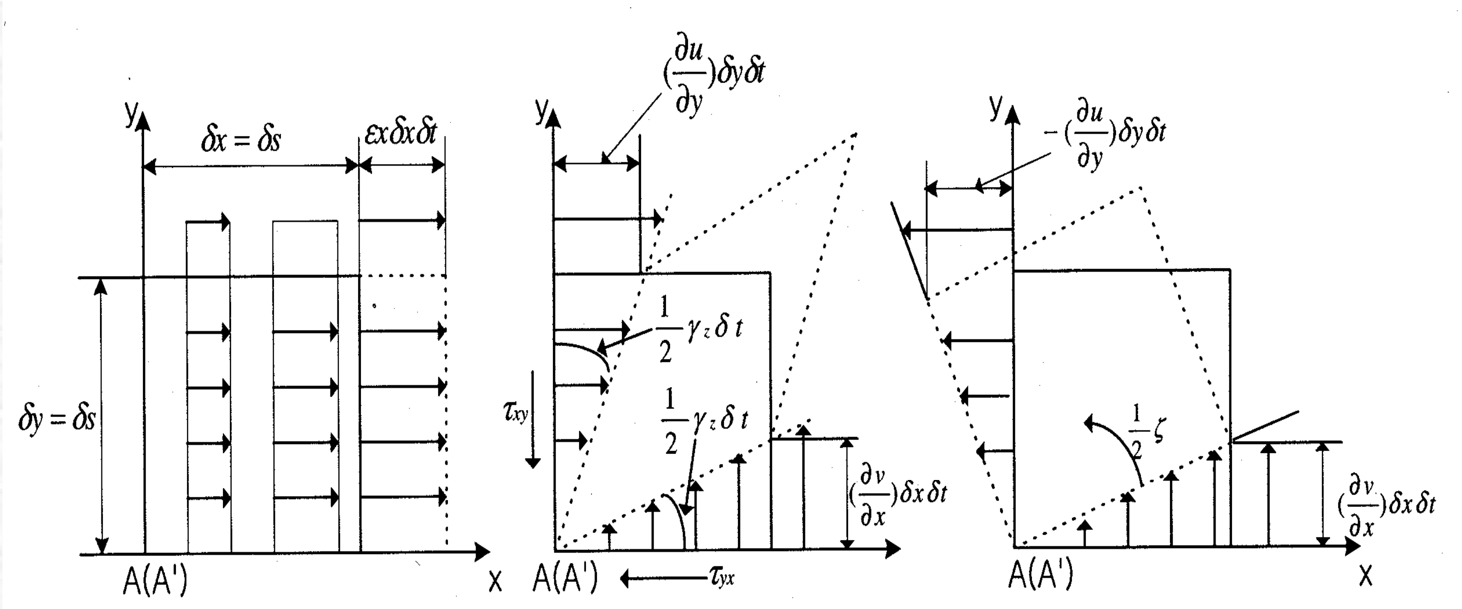
1. 粘性流体의 性質

회전각속도는,

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \Omega}{\partial t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{(\delta \alpha - \delta \beta)}{2 \delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1\text{-}11)$$

f. xy 평면상에서 $\varepsilon_x, \gamma_z, \zeta$가 각각 단독으로 존재하는 유장을 가정하여 A와 A'를 겹치게하여 비교해 보면 그림 1.2와 같은 독자의 운동을 알수 있다. 특히, τ_{xy} 및 τ_{yx}, ζ의 방향에 주의.



(a)신축에 의한 운동 $(\varepsilon_y = \gamma_z = \zeta = 0)$

(b)전단에 의한 운동 $(\varepsilon_x = \varepsilon_y = \zeta = 0)$

(c) 회전에 의한 운동 $(\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_z = 0)$

그림 1.2 유체의 운동의 종류

1-4. 流体의 内部応力

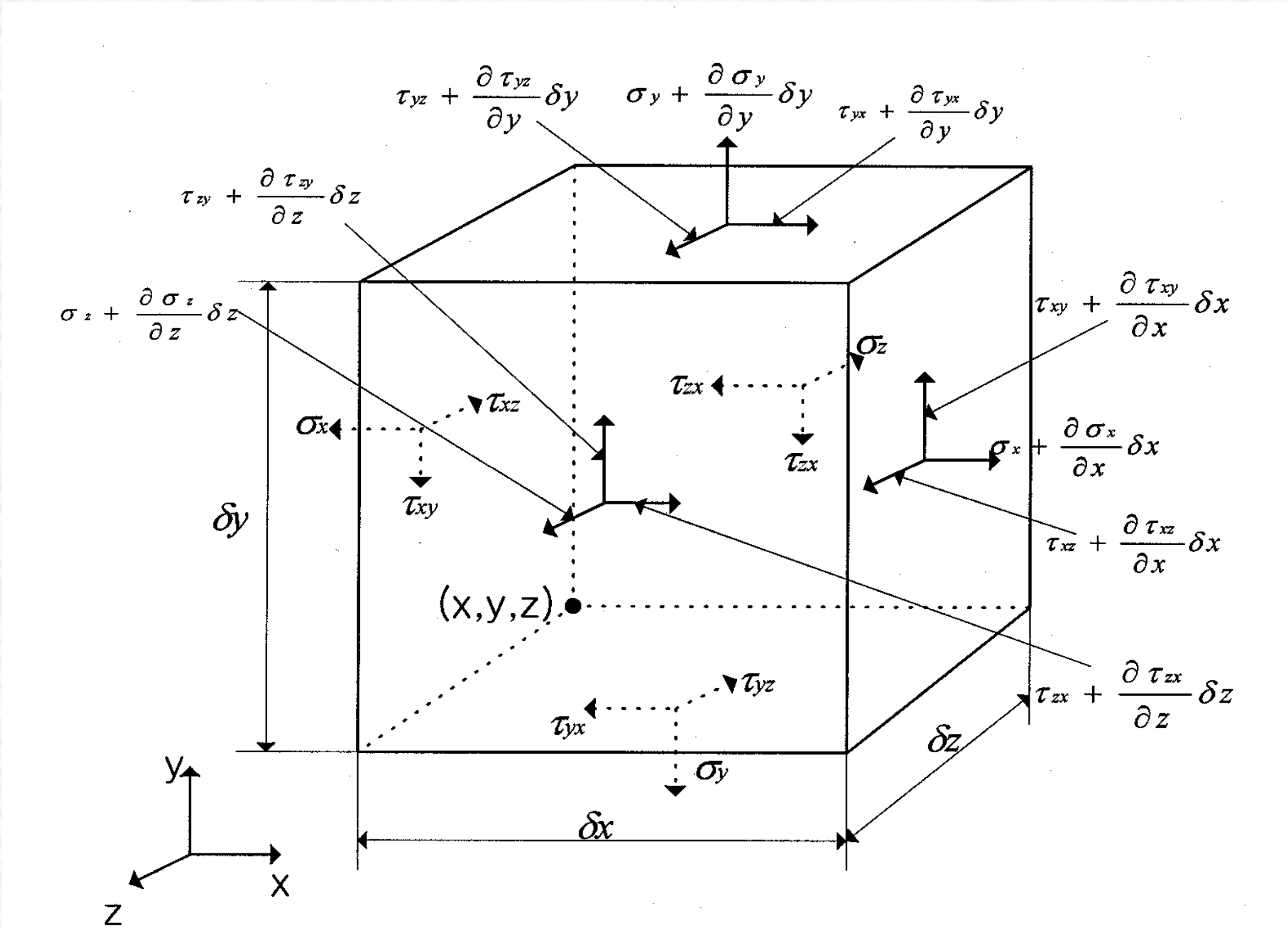


그림 1.3 유체 입자가 벽면에 작용하는 응력

1. 粘性流体의 性質

a. 압력 : 면에 수직인 법선응력으로 작용.

b. 전단응력 : 면에 접하는 접선응력으로 작용.

c. 내부응력은 表面応力(surface stress)

d.

法線応力	接線応力
normal-stress	tangential- stress
pressure	shearing-stress
$\partial x, \partial y, \partial z$	$\tau xy, \tau xz, \tau yx$ $\tau yz, \tau zx, \tau zy$

e.応力 tensor

$$\Pi = \begin{pmatrix} \partial x & \tau yx & \tau zx \\ \tau xy & \partial y & \tau zy \\ \tau xz & \tau yz & \partial z \end{pmatrix}$$

변형속도 tensor

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varepsilon x & \tau z & \tau y \\ \tau z & \varepsilon y & \tau x \\ \tau y & \tau x & \varepsilon z \end{pmatrix}$$

f. 압력의 정의 (점성유체의 경우)

P : 動力學적 압력(kinemaiic pressure)

p_s: 열역학적 평형상태의 압력(thermodynamic or equilibrium pressure)

$$p = p_\zeta - \mu'(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = p_\zeta - \mu' divV \qquad (1\text{-}12)$$

1. 粘性流体의 性質

μ' : 체적점성계수(bulk viscosity)

(stoke's의 가설 μ'≒ 0)

점성유체의 경우에는 $\sigma_x \neq \sigma_y \neq \sigma_z$

유체역학적 압력 P = $-\dfrac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ (1-13)

8. 법선응력에 의한 전단변형(그림1.4)

$$\sigma_x - \sigma_x = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$ 의 관계를증명

- ∘ △ABC : 이등변 삼각형
- ∘ 변 AC 및 AB에는 법선응력만 작용

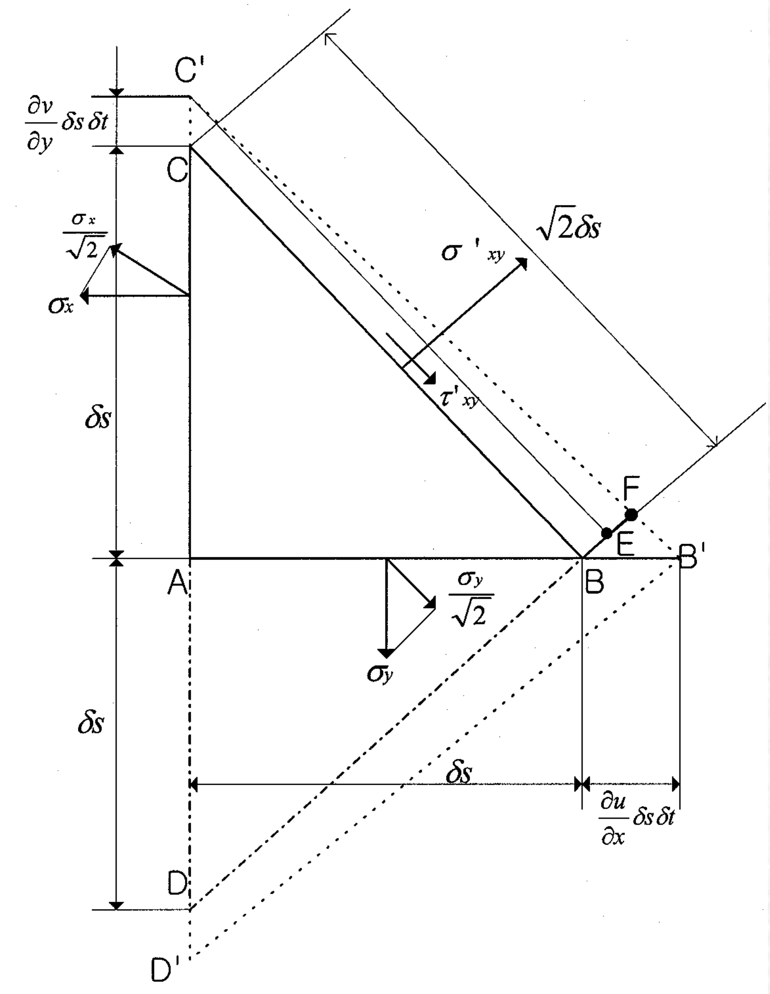


그림 1.4 법선응력에 의한 전단변형

$$\tau'_{xy} \times \sqrt{2}\delta s + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta x \times \delta\zeta = 0$$ 으로부터 $$\sigma_x - \sigma_y = 2\tau'_{xy} \qquad (1\text{-}14\text{-}1)$$

δt시간후 ▵ABC는 σ_x, σ_y 의 작용에 의해 미소신축변형을 행함

$$\frac{\partial u}{\partial x} \times \delta t \times \delta s \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} \times \delta t \times \delta s$$

즉, ∠CBD는 ∠C'B'D'로 변화. 그림으로부터

$$\begin{pmatrix} \overline{BF} & \overline{BB}/\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \times \delta t \times \delta s \\ \overline{BE} & \overline{C'C}/\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \times \delta t \times \delta s \\ \overline{C'E} & \sqrt{2}\delta s + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \times \delta t \times \delta s \end{pmatrix}$$ 의 관계가 성립하므로

$$\angle EC'F \fallingdotseq \tan\angle EC'F = \frac{\overline{BF}-\overline{BE}}{C'E} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta t}{2+\frac{\partial v}{\partial y}\delta t}$$

∠CBD − ∠C'B'D' = 2 × ∠EC'F 이므로 전단에의한 각도 변화량 즉, 전단변형속도는

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}(\angle CBD-\angle C'B'D') = \lim_{\delta t\to 0}\frac{2\angle EC'F}{\delta t}$$

$$= \frac{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta t}{2+\frac{\partial v}{\partial y}\delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1\text{-}14\text{-}2)$$

$$\tau'_{xy} = \mu\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(\sigma x - \sigma y) \qquad (1\text{-}14\text{-}3)$$

같은 요령으로 정리하면,

$$\boxed{\sigma x - \sigma y = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right), \sigma y - \sigma z = 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right), \sigma z - \sigma x = 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)}$$

(1-14-4)

h. 식(1-13), 식(1-14-4)으로부터 법선응력에 관한 다음과

같은식이 성립

$$p = -\frac{\sigma x + \sigma y + \sigma z}{3}$$

$$\sigma x - \sigma y = 2\mu\left(\frac{\sigma u}{\sigma x} - \frac{\sigma v}{\sigma y}\right)$$

$$\sigma y - \sigma z = 2\mu\left(\frac{\sigma v}{\sigma y} - \frac{\sigma w}{\sigma z}\right)$$

$$\sigma x - \sigma y = 2\mu\left(\frac{\sigma w}{\sigma z} - \frac{\sigma u}{\sigma x}\right)$$

$$p = -\frac{1}{3}\left(\sigma x + \sigma y - 2\mu\left(\frac{\sigma u}{\sigma x} - \frac{\sigma v}{\sigma y}\right) + \sigma x + 2\mu\left(\frac{\sigma w}{\sigma z} - \frac{\sigma u}{\sigma x}\right)\right)$$

$$3p = -\left(3\sigma x - 2\mu\frac{\sigma u}{\sigma x} + 2\mu\frac{\sigma v}{\sigma y} + 2\mu\frac{\sigma w}{\sigma z} - 2\mu\frac{\sigma u}{\sigma x}\right)$$

$$-3p = -3\sigma x + 2\mu\left(\frac{\sigma u}{\sigma x} + \frac{\sigma v}{\sigma y} + \frac{\sigma w}{\sigma z}\right) - 6\mu\frac{\sigma u}{\sigma x}$$

$$\sigma x = -p - \frac{2}{3}\mu\ div\ V + \frac{\sigma u}{\sigma x}$$

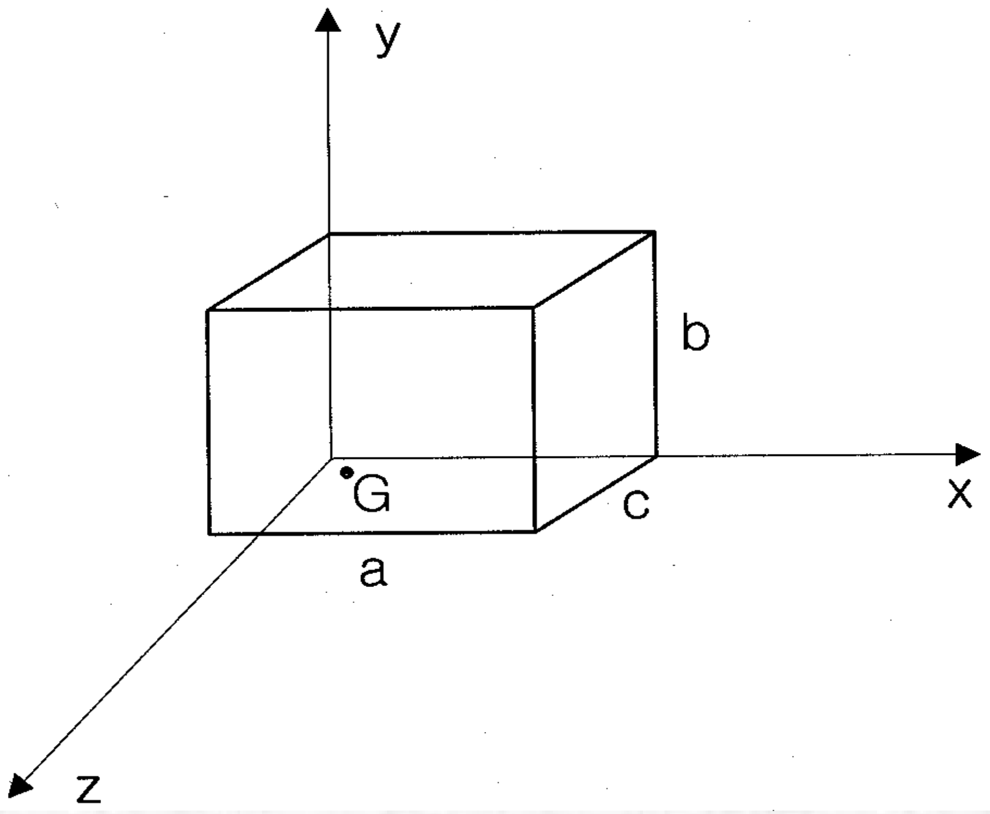
같은 요령으로,

$$\sigma y = -p - \frac{2}{3}\mu\ div\ V + \frac{\sigma v}{\sigma y}$$

$$\sigma z = -p - \frac{2}{3}\mu\ div\ V + \frac{\sigma w}{\sigma z}$$

$$div\ V = \frac{\sigma u}{\sigma x} + \frac{\sigma v}{\sigma y} + \frac{\sigma w}{\sigma z} \qquad (1\text{-}15)$$

관성모멘트



i. 접선방향의 전단응력에 관해 다음과 같은 관계가 성립함을 증명

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

그림 1-3에서 z 축에 평행인 δx − δy 면 중심을 지나는 축에 관해 Torque 를 계산. T=F×r = (m· w)×r = m· $r^2\times\omega$=관성모멘트 ×각 가속도

$$I_{xG} = \frac{\gamma_o}{g} \times \frac{abc}{12} \times \left(a^2 + b^2\right) = m \times \frac{1}{2} \times \left(a^2 + b^2\right)$$

$$\left(2\tau_{xy}\,\delta y\,\delta z\right) \times \frac{\delta x}{2} - \left(2\tau_{yx}\,\delta z\,\delta x\right) \times \frac{\delta y}{2} = I_z \frac{d\Omega_z}{dt}$$

$$\rho\,\delta x\,\delta y\,\delta z\left(\left(\delta x\right)^2 + \left(\delta y\right)^2\right) \times \frac{1}{12}$$

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = \rho\,\frac{\left(\delta x\right)^2 + \left(\delta y\right)^2}{12} \times \frac{d\Omega_z}{dt}$$

회전의 각속도가 유한의 값을 갖고 δx,δy →0 의 극한의 경우 우변은 0

$$\therefore \tau xy = \tau yx$$

같은요령으로, $\tau yz = \tau zy,\ \tau xz = \tau zx$

$$\tau xy = \tau yx = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\tau yz = \tau zy = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\tau zx = \tau xz = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

(1-16)

yz 및 xz 면에 전단응력 $\tau xy, \tau yx$ 가 작용하는 경우, 전단에 의한 변형은 그림 (1.2) 의 (b) 에 해당하고 Newton 에 의해

1-5. 내부응력에 의한 힘 과 일 (force & work)

a. 그림(1.3)에서 δyδz, δzδx, δxδy 면에 작용하는 x 의 부의 방향의 힘의 합계는 X=x, Y=y, Z=z의 위치에서

$$-\left(\delta x\,\delta y\,\delta z+\tau yx\,\delta z\,\delta x+\tau zx\,\delta x\,\delta y\right)$$

(A) x=x+δx, y=y+δy, z=z+δz 의 위치에서 정의 방향의 힘의 합계는 Taylor 급수전개의 제1항까지를 고려하면,

$$\left(\delta x+\frac{\partial\,\delta x}{\delta x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z+\left(\tau yx+\frac{\partial\,\tau yx}{\delta y}\,\delta y\right)\delta z\,\delta x+\left(\tau zx+\frac{\partial\,\tau zx}{\delta z}\,\delta z\right)\delta x\,\delta y$$

따라서, 단위질량,단위체적에 작용하는 x 방향의 힘은

$$\frac{(A+B)}{(\rho\delta x\delta y\delta z)} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\delta x}{\delta x} + \frac{\partial\tau yx}{\delta y} + \frac{\partial\tau xz}{\delta z}\right)$$

식 (1-15)에서, $\sigma x = -\rho + \tau xx,\ \tau xx = -\frac{2}{3}\mu\ div\ V + 2\mu\frac{\sigma u}{\sigma x}$

의 관계식으로 변형하면, 식(c)는

$$Fx = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau xx}{\partial x} + \frac{\partial\tau zx}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho} + \frac{\partial p}{\partial x} + fx$$

같은요령으로

$$Fy = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + fy,\ fy = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau xy}{\partial x} + \frac{\partial\tau yy}{\partial y} + \frac{\partial\tau zy}{\partial z}\right) \qquad (1\text{-}17)$$

1. 粘性流体의 性質

$$F = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + fz,\ fz = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau xz}{\partial x} + \frac{\partial \tau yz}{\partial y} + \frac{\partial \tau zz}{\partial z}\right) \qquad \text{(1-17)'}$$

$$f = (fx, fy, fz)$$

즉, 내부응력에 의한 힘은 압력구배에 의한 힘과 마찰력(점성력)의 합

b. 속도 v의 유체에 단위질량당 F의 힘이 작용하는 경우, 단위시간당 유체에 가해지는 일은 (속도) ×(흐름방향의 힘)의 관계로 부터 구해진다.

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{F_t \times \delta l}{\delta t} = F_t \times v = V \times F$$

그림(1.3)에서, x=x, y=y, z=x에 있어서의 δyδz면, δxδy 면에서 행해지는 일의 합은, 내부응력이 부의 방향으로 작용하므로,

$$-\left(W_x'\delta y\delta z + W_y'\delta z\delta x + W_z'\delta x\delta y\right)$$

' 는 단위면적당의 일.

$$W_x' = u\delta x + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}$$

$$W_y' = u\tau_{yx} + v\sigma_y + w\tau_{yz}$$

$$W_z' = u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\sigma_z$$

1. 粘性流体의 性質

x = x + δx, y = y + δy, z = z + δz 의 위치에서 δyδz 면, δzδx면, δxδy 면에서 행해지는 행해지는 일은, 응력이 正의 방향으로 작용하므로

$$\left(W_x' + \frac{\partial W_x'}{\partial x}\partial x\right)\partial y \partial z + \left(W_y' + \frac{\partial W_y'}{\partial y}\partial y\right)\partial z \partial x + \left(W_z' + \frac{\partial W_z'}{\partial z}\partial z\right)\partial x \partial y$$

따라서, 단위질량상의 유체에 행해지는 일은

$$\frac{(D+E)}{\rho \delta x \delta y \delta z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial W_x'}{\partial x} + \frac{\partial W_y'}{\partial y} + \frac{\partial W_z'}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(u\partial x + v\tau xy + w\tau xz) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau yx + v\partial y + w\tau yz) + \frac{\partial}{\partial z}(u\tau zx + v\tau xy + w\partial z)\right\}$$

$$
=\frac{1}{\rho}\left(\partial x\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial \sigma x}{\partial x}+\tau xy\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial \tau xy}{\partial x}+\tau yz\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial \tau xz}{\partial x}\right.
$$

$$
+\tau xy\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial \tau yx}{\partial y}+\partial y\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial \sigma y}{\partial y}+\tau yz\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial \tau yz}{\partial y}
$$

$$
\left.+\tau zx\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial \tau zx}{\partial z}+\tau zy\frac{\partial v}{\partial z}+v\frac{\partial \tau zy}{\partial z}+\partial z\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial \sigma z}{\partial z}\right\}
$$

$$=\frac{1}{\rho}\left\{\left(\partial x\frac{\partial u}{\partial x}+\partial y\frac{\partial v}{\partial y}+\partial z\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\left(u\frac{\partial \sigma x}{\partial x}+v\frac{\partial \sigma y}{\partial y}+w\frac{\partial \sigma z}{\partial z}\right)\right.$$

$$+\tau xy\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\tau zx\left(\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\tau yz\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\left.+u\left(\frac{\partial \tau yx}{\partial y}+\frac{\partial \tau zx}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial \tau xy}{\partial x}+\frac{\partial \tau zy}{\partial z}\right)+w\left(\frac{\partial \tau xz}{\partial x}+\frac{\partial \tau yz}{\partial y}\right)\right\}$$

식(1-17)으로부터 $\partial x, \partial y, \partial z$가 $-\rho+\tau xx, -\rho+\tau yy, -\rho+\tau zz$로 바뀌어 정리하면,

$$= -\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(\tau xx\frac{\partial u}{\partial x}+\tau yy\frac{\partial vv}{\partial y}+\tau zz\frac{\partial w}{\partial z}+u\frac{\partial \tau xx}{\partial x}+v\frac{\partial \tau yy}{\partial y}+z\frac{\partial \tau zz}{\partial z}\right.$$

$$+\tau xy\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\tau zx\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\tau yz\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\left.+u\left(\frac{\partial \tau yx}{\partial y}+\frac{\partial \tau zx}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial \tau xy}{\partial x}+\frac{\partial \tau xy}{\partial z}\right)+w\left(\frac{\partial \tau xz}{\partial x}+\frac{\partial \tau yz}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \frac{p}{\rho}\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \qquad (1\text{-}18)$$

$$+\left(f_x u + f_y v + f_z w \right) + \Phi / \rho$$

$$\Phi = \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau_{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \tau_{zx}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

vector 로 표시하면,

$$W = \underbrace{-V\frac{1}{\rho}gr\partial dp}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\frac{p}{\rho}divV}_{\mathrm{II}} + \underbrace{V \times f}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\Phi}_{\mathrm{IV}} \qquad (1\text{-}19)$$

1. 粘性流体의 性質

Ⅰ : 압력구배가 유체에 행한 일

Ⅱ : 마찰력이 유체에 행한일

Ⅲ : 압력작용에 의한 체적변화에 동반한 일

내부응력이 단위시간당 단위질량당 유체에 해하는 기계적 일 (기계적 에너지)

Ⅳ : 에너지 散逸함수(Energy Dissipation Function):기계적에너지로 변환되지 않고, 유체가 변형하는 동안 熱로 바뀌어 消散하는 손실에너지

$$\Phi=\left\{2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$\left\{2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\frac{\partial v}{\partial y}+$$

$$\left\{2\mu\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\frac{\partial w}{\partial z}+$$

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\times\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\times\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\times\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

(1-20)

$$
\begin{aligned}
&= 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \\
&2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \\
&2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\
&+ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)
$$

$$
\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2-\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2
$$

$$
+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2
$$

$$= \frac{2}{3}\mu\left\{\left(\frac{\sigma x-\sigma y}{2\mu}\right)^2+\left(\frac{\sigma y-\sigma z}{2\mu}\right)^2+\left(\frac{\sigma z-\sigma x}{2\mu}\right)^2\right\} \longleftarrow \mathrm{I}$$

$$+\mu\left(\gamma_x{}^2+\gamma_y{}^2+\gamma_z{}^2\right) \longleftarrow \mathrm{II}$$

Ⅰ : 법선응력에 의해 발생하는 전단변형으로부터의 유체마찰손실

Ⅱ : 유체고유의 전단운동에 의해 발생하는 유체마찰손실

1.6 粘性係數와 熱傳達率

a. 전단응력은 흐름장에 속도구배(운동량구배)가 있는 경우체 작용하며, 점성계수μ는 이때의 운동량교환에 중요한 역할을 하는 계수

b. 분자의 불규칙한 열운동에 상당하는 열에너지는 유체운동에 직접관여하지 않는 내부에너지(Internal Energy)이고, 그 크기는 溫度로 認識됨.

c. 흐름장에 온도구배(내부에너지구배)가 존재할 시, 내부에너지의 교환에 중요한 역할을 하는 계수를 熱傳達率k(Thermal Conductivity, J/m.s.K)

d. 미시적으로는 μ는 분자운동의 평균적인 운동량의 전달에 관계하고, k는 분자의 불규칙운동의 운동에너지의 전달에 관여.

e. 무차원수로서 Prandtl Number Pr = μCp/k(Cp :定壓比熱 J/kg.K)

f. 단위시간에 단위면적을 통과하는 열량(熱流速 J/m^2s

Qc : – Fourier's law –

Qc = –kgrad T (1-21)

g. 열전도에 의해 단위시간에 단위체적의 유체에 가해지는 열량 Qc는 :

그림 1·3의 미소직방체 $\delta x \delta y \delta z$의 x=x에서의 $\delta y \delta z$면을 통해 단위시간에 유입하는 열량은

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\times \delta y \delta z$$

$x = x + \delta x$ 에서의 $\delta y \delta z$면으로부터 유출하는 열량은,

$$-\left\{k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\delta x\right\}\delta y \delta z$$

잔유열량은 (A) – (B) = $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)\delta x \delta y \delta z$

$\delta z \delta x$, $\delta x \delta y$면에서도 같은 요령으로 정리하면, 단위체적당·단위 시간당 가해지는 열량은 k를 정수로 간주하면,

$$Q_c = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) = div\left(kgr\partial dT\right)$$

$$= k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = k \vee^2 T \quad (1\text{-}22)$$

2. 粘性流體의 기초식

2·1 유체의 운동을 기술하는 방법

a. Lagrange의 방법 : 각각의 유체입자가 시간과 함께 변화하는 상황, 즉 하나의 유체입자에 着目 하여, 임의의 시간에 있어서의 軌跡, 속도, 압력 및 밀도 등의 변화를 추적하는 방법

b. Euler의 방법 : 유체중의 임의의 一点에 착목하여 이 점에 있어서의 유체입자가 각 순간에 타내는 제 변수의 변화에 의해 유체운동을 기술하는 방법

c. 대개의 경우, 균질적인 유체에서는 각각의 유체입자는 본질적으로 같은 성질을 가지므로, 이들의 이력는 중요하며, 대신 각점에 있어서의 유체의 상태 및 그 시간적변화를 알면 충분하다.

⇒ Euler의 방법의 장점

2. 粘性流體의 기초식

d. 유체역학에서는 “주어진 경계조건을 만족하는 흐름의 상태를 구하는 것이 최종목적”

독립변수: 공간좌표(예를들어 직각좌표에서의 x,y,z) 및 시간 t : 4개

미지수 : 속도Vector W(u,v,w) 및 열역학적 상태량

(p ,ρ, T , e , h , s 등)中 둘: 5개

관계식 : 질량보존칙, 운동량보존clr(3성분), 에너지보존칙: 5개

즉, 미지수 5개에 대한 5개의 조건식이 존재하므로 "원리적"으로는 주어진 각각의 경계조건에 응해서 문제를 풀수 있다.

2.2 흐름에 있어서의 물리량의 변화

a. 시각t, 흐름장의 임의의 점(x,y,z) 에서의 물리량을 A 라 하면 A 는 (t, x, y, z)의 함수이므로, A의 변화량 δA는 Taylor전개에 의해

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial t}\partial t + \frac{\partial A}{\partial x}\partial x + \frac{\partial A}{\partial y}\partial y + \frac{\partial A}{\partial z}\partial z + O\left(\delta t^2, \delta x^2, \delta y^2, \delta z^2\right)$$

$$u = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\partial t}, \quad v = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta y}{\partial t}, \quad w = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta z}{\partial t}$$

c. 유체역학에서는 偏微分演算子를 도입하여,

2. 粘性流體의 기초식

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{DA}{Dt}=\underbrace{\frac{\partial A}{\partial t}}_{\mathrm{I}}+\underbrace{u\frac{\partial A}{\partial x}+v\frac{\partial A}{\partial y}+w\frac{\partial A}{\partial z}}_{\mathrm{II}} \qquad (2\text{-}1)$$

(I) : 局所에 있어서의 시간적 변화,

定常流(Steady Flow), 非定常流(Unsteady Flow)

(II) : 물리량이 공간적으로 균일하지 않은 경우, 유체의 이동에 의해 생기는 對流的변화. 連續體의 역학과 質点系(剛體)의 力學과의 중요한 相違点

d. 물리량을 유체입자의 위치 Vector IV(x,y,z)이라 하면, Euler의 방법에서는 t에 무관계하므로

$$\frac{DV}{Dt} = u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z} = V \qquad (2\text{-}2)$$

Vector량 IV의 시간적변화는, 유체의 加速度

$$\frac{DV}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z}}_{\mathrm{II}} \qquad (2\text{-}3)$$

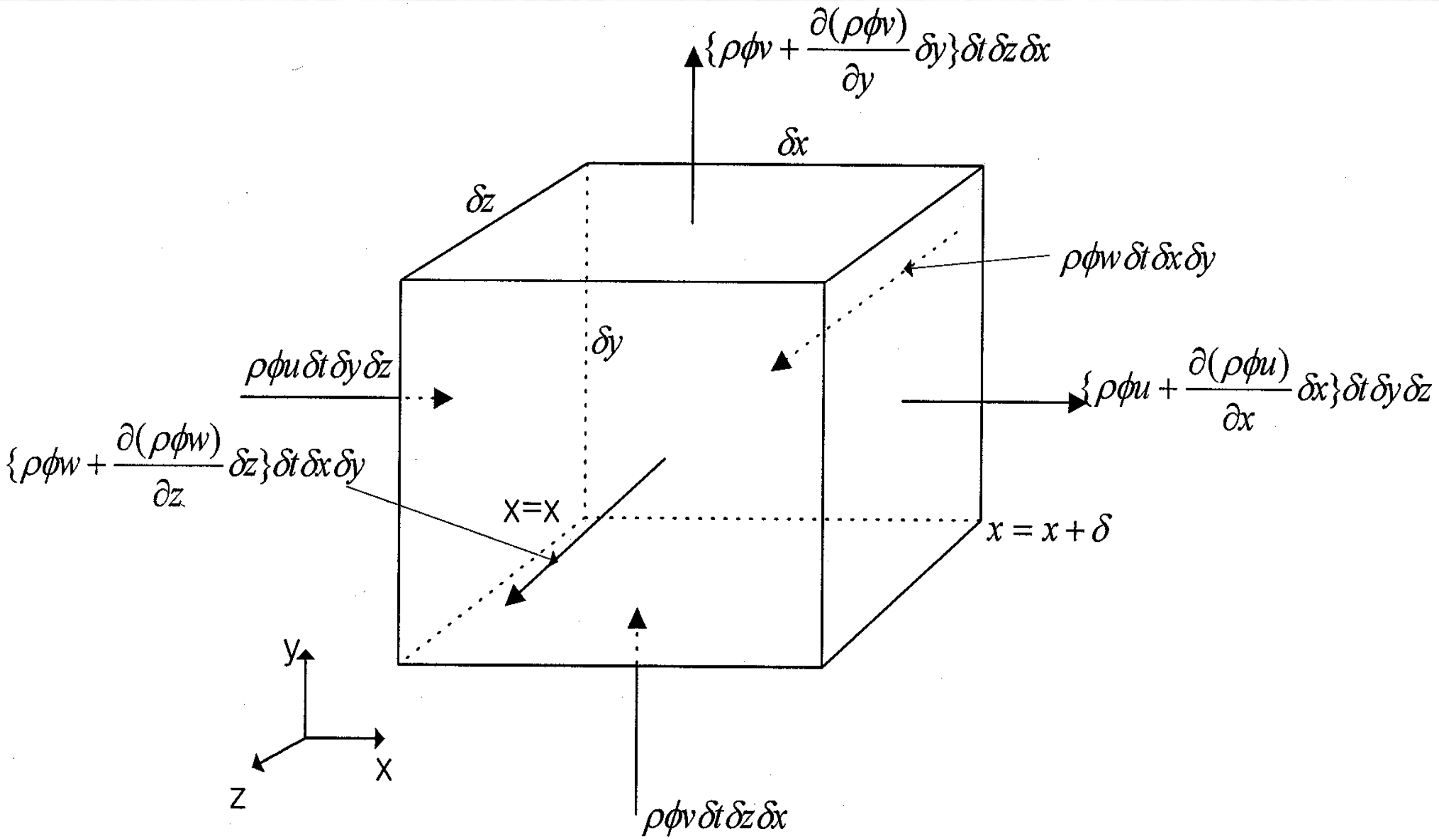

$\{\rho\phi v + \frac{\partial(\rho\phi v)}{\partial y}\delta y\}\delta t\,\delta z\,\delta x$
δx
δz
$\rho\phi w\,\delta t\,\delta x\,\delta y$
δy
$\rho\phi u\,\delta t\,\delta y\,\delta z$
$\{\rho\phi u + \frac{\partial(\rho\phi u)}{\partial x}\delta x\}\delta t\,\delta y\,\delta z$
$\{\rho\phi w + \frac{\partial(\rho\phi w)}{\partial z}\delta z\}\delta t\,\delta x\,\delta y$
x=x
$x = x + \delta$
y
x
z
$\rho\phi v\,\delta t\,\delta z\,\delta x$

그림 (2.1)

(I) : 局所적 가속도 (Local Acceleration)
(II) : 對流적 가속도(Convectional Acceleration)

진의 가속도 (Substantial acceleration)

e. 단위질량당의 물리량을 ϕ로 표시하여 ϕ의 변화를 구해보면:

그림2.1에서

i) 미소직방체의 표면을 통해 유출하는 對流的 증가는, δt시간에

x=x의 $\delta y \delta z$ 면으로부터 유입하는 물리량은 밀도를 ρ로 하면

$(\rho \phi u \delta t \delta y \delta z)$, $x = x + \delta x$ 에서의 $\delta y \delta z$면으로부터 유출하는

물리량은

$$\left[\rho\phi u + \left\{ {\partial(\rho\phi u)}\middle/{\partial x} \right\}\partial x\right] \times \delta t\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

$\delta z\delta x, \delta x\delta y$ 면에서도 같으므로, 결국 표면을 통한 유출량(대류적증가)은,

$$\left\{\frac{\partial(\rho\phi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\phi v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\phi w)}{\partial z}\right\} \times \delta t\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

ii) 직방체내에서 시간동안 증가하는 량, 즉 局所的 증가는,

$$\frac{\partial(\delta\phi)}{\partial t}\,\delta t\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

iii) 따라서 {(A)+(B)} / $\left(\rho\,\delta t\,\delta x\,\delta y\,\delta z\right)$가 단위질량의 유체에 대한

ϕ의 시간적변화를 나타내며, 정리하면

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\phi u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\phi v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\phi w)}{\partial z}\right]$$

$$=\frac{1}{\rho}\left\{\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi\frac{\partial\rho}{\partial t}+\phi u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho u\frac{\partial\phi}{\partial x}+\rho\phi\frac{\partial u}{\partial x}+\phi v\frac{\partial\rho}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\rho v\frac{\partial\phi}{\partial y}+\rho\phi\frac{\partial v}{\partial y}+\phi w\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho w\frac{\partial\phi}{\partial z}+\rho\phi\frac{\partial w}{\partial z}\right\}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + w\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$+ \phi\left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}$$

$$= + \frac{D\phi}{Dt} + \phi\left(\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} + divV\right) \qquad (2\text{-}4)$$

iv) 단위시간, 단위체적당 체적변화는, $\phi = \frac{1}{\rho}$

(비용적: 단위질량당 체적)이라 하면

$$\frac{D\left(1/\rho\right)}{Dt} + \frac{1}{\rho^2} \times \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} divV$$

$$= -\frac{1}{\rho^2}\times\frac{Dp}{Dt}+\frac{1}{\rho^2}\times\frac{Dp}{Dt}+\frac{1}{\rho}divV=\frac{1}{\rho}divV$$ 이므로

$$\frac{\left(\frac{1}{\rho}\right)divV}{1/\rho}=divV$$

v) 질량보존칙으로부터 $$\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}+divV=0$$

이므로 단위질량의 유체에 대하여 φ의 변화는

$$\frac{D\phi}{Dt}=\frac{D\phi}{Dt}+u\frac{D\phi}{Dx}+v\frac{D\phi}{Dy}+w\frac{D\phi}{Dz} \qquad (2\text{-}5)$$

즉, 식(2.1)과 일치한다.

2.3 連續의 式 – 質量保存則

고전역학에 있어서 질량보존칙은 '系의 질량은 변화하지 않는다' 이고, 系로서 단위질얄의 유체를 고려하면, ϕ는 단위질량당 질량으로 ϕ=1의 경우 식(2.4)는 0이 되어야 한다. 즉

$$\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right\}=\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho V)\right\}\times\frac{1}{\rho}$$

$$=\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\times\frac{1}{\rho}$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}+divV=0 \qquad (2\text{-}6)$$

定常流의 경우는

$$\frac{\partial}{\partial t}=0, \quad div(\rho V)=\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \qquad (2\text{-}7)$$

非압축성流에서는 ρ가 일정하므로 정상, 비정상에 관계없이

$$divV=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (2\text{-}8)$$

2.4 Navier-Stokes(方程)식 - 운동방정식 - 운동량보존칙

a. 고전역학에서의 물체의 운동방정식(Equation of Motion)은 Newton의 운동제2법칙에 따르는 “질량 × 가속도 = 물체에 작용하는 힘”의 공식, 다른 표현으로는 “系에 있어서 운동량의 변화는 그 系에 작용하는 힘과 같다”. : 운동량보존칙

b. 流體의 운동에 관해서도 상기의 표현은 그대로 성립

$^{DV}/_{Dt} =$ 단위질량의 유체에 작용하는 힘 ← 식(2-3)

c. 가속도는 단위질량의 유체의 운동량의 시간적 변화

d. 어느 공간영역에 운동량보존칙을 적용하여 그 영역을 무한히 작게한 경우의 극한의 식이 운동 방정식

e. 유한의 공간에 운동량보존칙을 적용한 식은 운동량(적분)방정식 (Integral Equation of Motion) : 검사체적에 관한 거시적인 해석에 중요

f. 점성유체에 있어서 단위질량의 유체에 작용하는 힘은 外力 =(X,Y,Z)외에 내부응력에 의한 힘 (1-17)이 존재함 따라서, 운동방정식은

$$Du/Dt = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + f_x$$

$$Dv/Dt = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + f_y$$

$$Dw/Dt = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + f_z$$

F ◦

N−S 방정식

또는, $$\underbrace{DV/Dt}_{\mathrm{I}} = \underbrace{F \circ}_{\mathrm{II}} \underbrace{- \frac{1}{\rho} fr\partial dp}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\mathrm{f}}_{\mathrm{IV}}$$

(2-9)

Ⅰ : 단위질량의 유체에 작용하는 관성력

Ⅱ : 外力

Ⅲ : 압력구배에 의한 힘

Ⅳ : 마찰력

의 힘의 균형을 나타낸다.

g. Newton유체에서 점성계수 μ가 일정하다면 x방향에 관한 N·S방정식은 다음과 같이 정리된다.

$$F_{ix} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + f_x = \frac{Du}{Dt}$$

$$f_x = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

$$\partial \tau xx = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu div V \quad \leftarrow \quad \sigma x = -\rho + \tau xx$$

$$\tau xy = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\tau yx = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\tau zx = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fx$$

$$= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \mathrm{div IV}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}\right]$$

$$= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left\{2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right)\right.$$

$$\left. + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right\}$$

$$= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad (2\text{-}10)$$

y,z방향에 대해서도 같은 요령으로 정리하여 Vector표시에 의하면

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{DV}{Dt} = F - \frac{1}{\rho} gr\partial dp + \nu\nabla^2 V + \frac{1}{3}\nu gr\partial d(divV) \\ \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\end{gathered}} \quad (2\text{-}11)$$

비압축성유체의 경우에는 divV = 0,

$$\frac{DV}{Dt} = F - \frac{1}{\rho} gr\partial dp + \nu\nabla^2 V \qquad (2\text{-}12)$$

비정상유체의 경우에는 압축성에 관계없이 $$\frac{DV}{Dt} = F - \frac{1}{\rho} gr\partial dp \qquad (2\text{-}13)$$

(Euler 운동방정식)

2.5 에너지의 식 – 에너지 보존칙

2.5.1 유체역학적 에너지식 및 열역학의 제1법칙

a. 에너지 보존칙: “系의 에너지 증가는 그 계에서 행해진 일과 가해진 열량과의 합과 같다”

b. 단위질량의 유체가 갖는 에너지는 내부에너지e와 운동에너지

$$\frac{1}{2}V^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(u^2 + v^2 + w^2\right)$$ 가 있고 $$\phi = e + \left(\frac{1}{2}\right)V^2$$

로 정의하면 단위질량의 유체의 에너지의 변하는 $\frac{D}{Dt} = \left(e + \frac{1}{2}V^2\right)$

c. 式(1.19) 및 단위질량에 가해진 열량을 Q/ρ라 하면 에너지 보존칙의 식은,

$$\frac{De}{Dt}+\frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=VF\circ -V\times\frac{1}{\rho}gr\partial dp+Vf-\frac{p}{\rho}divV+\frac{\phi}{\rho}+\frac{Q}{\rho} \quad (2\text{-}14)$$

d. N.S방정식으로부터의 유체역학적 에너지식

식(2.9)와 속도lV와의 內積이 각각의 힘의 성분에 의한 일을 의미하므로

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)=VF\circ -V\times\frac{1}{\rho}gr\partial dp+Vf \qquad (2\text{-}15)$$

e. 열역학적 에너지식

연속의 식(2-6)으로부터

$$\frac{p}{\rho} divV = -\frac{p}{\rho^2}\frac{Dp}{Dt} = p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{2-16}$$

(식 (2-14) - 식(2-15))의 관계 및 식(2-16)을 사용해서 정리하면

$$\frac{De}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{Q}{\rho} + \frac{\phi}{\rho} \tag{2-17}$$

여기에 $h = e + p/\rho$ 의 관계를 도입하면,

$$\frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho^2}\frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{Dp}{Dt} = \frac{Q}{\rho} + \frac{\phi}{\rho} \tag{2-18}$$

f. 식(2-17) 및 식(2-18)은 열역학제1법칙의 유체역학적 표현

$$de + \rho d\left(\frac{1}{\rho}\right) = dh - \frac{1}{\rho}dp = \delta q \qquad (2\text{-}19)$$

g. 식(2-18), 식(2-19)의 우변은 단위시간, 단위질량당의 유체에 가해진 열량으로 그중 Φ/ρ는 내부응력이 유체에 일을 하는 동안 발생하는, 유체마찰에 의한 발생열을 의미

h. $de = C_v dT$, $dh = C_v dT$ 식(1-22)를 식(2-18)및 식(2-19)에

대입하면,

$$C_v \frac{DT}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} = \frac{k}{\rho}\nabla^2 T + \frac{\phi}{\rho} \qquad (2\text{-}20)$$

비압축성유체(ρ=1)의 경우에는 $de = CdT, \;\; dh = CdT + {dp}/{\rho}$ C: 비열

$$C\frac{DT}{Dt} = \frac{k}{\rho}\nabla^2 T + \frac{\phi}{\rho} \tag{2-21}$$

i. 식(2-21)은 흐름에 있어서의 온도분포를 구할때 사용됨