



Computational Fluid Dynamics

전 산 유 체 역 학

한국해양대학교 기계에너지공학부

교수 이 영 호

lyh@mail.hhu.ac.kr, <http://www.pivlab.net>

KOREA MARITIME UNIVERSITY

Division of Mechanical & Information Engineering



1. CFD의 개요

< 유동현상의 규명 >

종래 : 실험기법 ▶ 가시화실험, 속도, 압력, 온도계측

이론해석 ▶ 지배방정식을 수학적으로 해결함

(해석해, Analytic solution)

CFD ▶ 지배방정식을 수치해법으로 해결함

(수치해, Numerical solution)

1.1 CFD (*C*omputational *F*luid *D*ynamics : 전산유체역학)

- 이공학분야에서 컴퓨터를 접두사로 갖는 전공명으로는 유체역학이 최초임
- 실험모형제작, 실험장치설계, 계측장비, 많은 운용요원 등이 불필요
- 실험조건의 변경이 용이
- 실험에 비하여 경제성이 우월
- **Navier-Stokes** 방정식이 기초
- 3차원의 비정상 속도성분 및 압력, 밀도, 온도 등이 동시에 구해짐
- 대용량의 데이터 저장에 의한 다양한 후 처리기능

1.2 비 선형문제

- 유동의 지배방정식인 **Navier-Stokes** 방정식은 전형적인 비선형문제
- 해석적인 접근이 거의 불가, 실험에 의존
- 극히 단순한 경계조건을 갖는 유동장에 한하여 해석해가 존재
(**Couette flow, Poiseuille flow, Stokes flow** 등 100여 종류)
- 수치해법이 발달한 가장 큰 이유
- 대용량, 고속의 연산기능을 갖는 컴퓨터가 필요함

1.3 극한조건을 갖는 유동장 문제

- 고온, 고압, 고진공, 무중력, 과중력, 고자장, 초임계 유동장
- 극저온, 지구중심부, 외계의 유동
- 폭발, 가연성, 위험성이 있는 유동장 (원자로내부 유동)
- 측정수단이 없는 유동 (예 : 액체수은중의 기포거동)
- 분자동력학 (**Molecular dynamics**)
- 캐비테이션 현상 - 자동차 실린더내부유동
- 하드디스크의 **Flying head**
- **Micro-machine** 내부유동
- 반도체 박막형성 - 클린룸 설계

1.4 시공간스케일이 큰 유동장 문제

- 기상예측 (국내, 1995년 3월부터 슈퍼컴퓨터가동)
- **Heat island**, 해양대순환 현상
- **LNG** 등 대형저장탱크 내 유동
- 오염물질확산예측(대기 및 수질, 해양)
- 하천 및 연안공학, 해일의 예측
- 빌딩 및 교각의 **Wind engineering**
- 환기 및 공조

1.5 수치 풍동 (Numerical wind tunnel)

- 실험조건이 어렵거나 실용적이지 못한 경우
- 대형선박, 잠수함 또는 프로펠러유동
- 고속 터어보기계 내부유동
- 항공기 익형 개발 및 동체유동
- 우주로켓의 공력발열문제
- 고속전철 또는 자동차의 공력특성
- 차세대 우주엔진개발 (스크램젯트엔진 등)
- 음향 소음대책

1.6 CFD의 기여

- 고성능 운송수단 (우주항공, 선박, 자동차, 기차 등)의 개발
- 고효율의 동력기계 개발 (가스터빈 등)

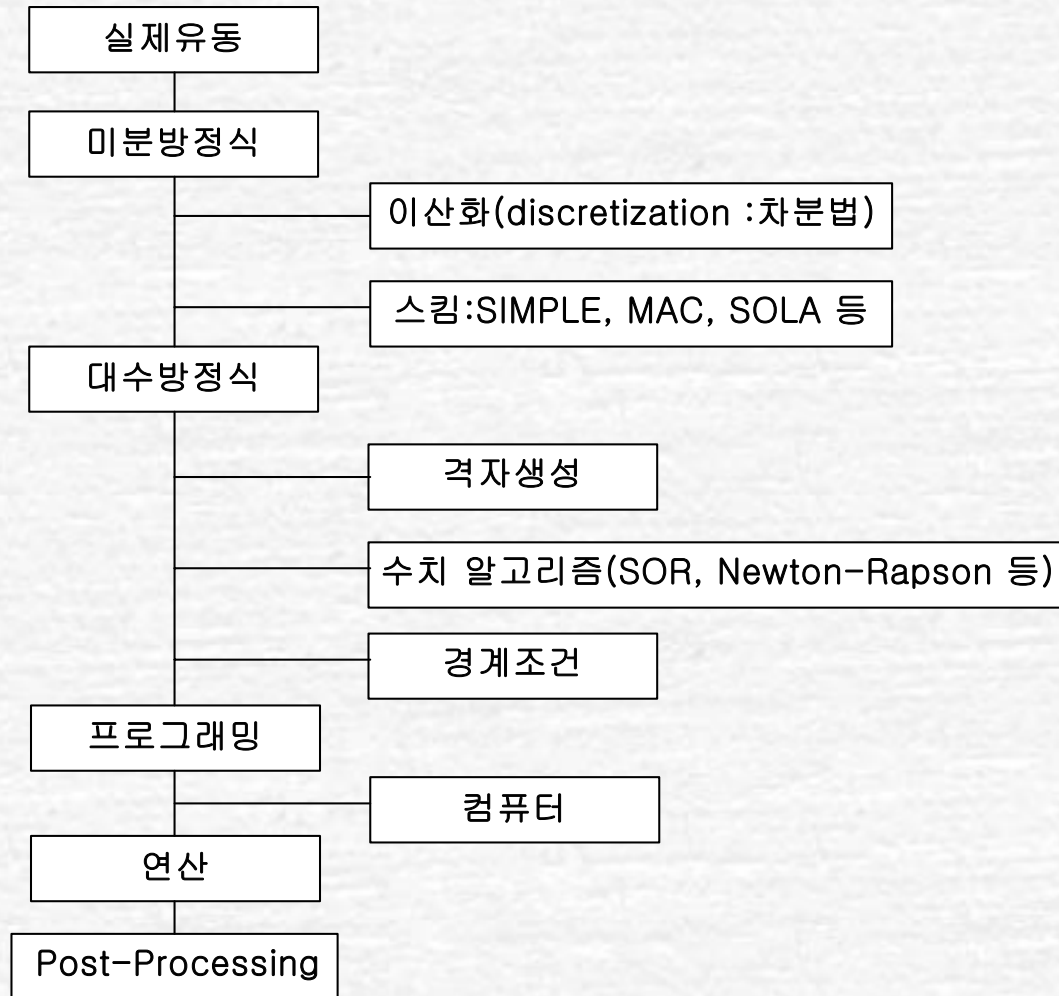
1.7 CFD의 현안

- 임의물체에 대한 격자생성이 비효율적
- 고 레이놀즈 수에서 불안정하며 해상도가 낮음
- 본격적인 비정상 3차원계산이 아직 불가
- 난류의 모델링기법의 불완전
- 기법의 복잡, 난해도가 증가

1.8 CFD의 장래

- 차세대 컴퓨터 개발
- 일반성 있는 새로운 수치기법이 요망
- 실험과의 정밀한 검증이 필요

2. 수치해법



2.1 차분법 (FDM : Finite Difference Method)

- 적용성이 가장 큼
- 정도가 높음
- 오차평가 확립
- 계산량이 작음
- 임의형상에 대한 격자생성이 어려움

2.2 유한요소법 (FEM : Finite Element Method)

- 범함수 등 수학적 이해가 요구됨
- 임의의 형상근사가 용이함
- 정도가 낮음
- 오차평가가 어려움
- 계산량이 많음

2.3 경계요소법 (BEM : Boundary Element Method)

- 경계에만 미소패널 분포
- 임의형상근사가 용이
- 유동장의 가정이 필요 (포텐셜 유동 등)
- 오차평가가 어려움
- 정도가 낮음
- 계산량이 작음

1. 차분식 기초

1.1 NS 방정식의 무차원화

편의상, 비압축성 유체의 경우에 대하여 x 방향만 고려하기로 한다.

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1-1)$$

상기의 식을 대표속도 U , 대표길이 L , 밀도 ρ 를 이용하여 무차원화 하면 아래와 같이 정리된다, 단, 아래에서와 같이, * 기호를 이용하여 무차원 변수를 표기한다.

$$x^* = x/L, y^* = y/L, u^* = u/U, v^* = v/U$$

$$t^* = t \cdot U/L, \quad p^* = p/\rho U^2 \quad (\because t^* = \frac{x^*}{u^*} = \frac{x}{u} \cdot \frac{U}{L} = t \cdot \frac{U}{L})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial(u^* U)}{\partial(t^* L/U)} \right) = \frac{\partial u^*}{\partial t^*} \cdot \frac{U^2}{L}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial t} = u^* U \cdot \frac{\partial(u^* U)}{\partial(x^* L)} = u^* \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \cdot \frac{U^2}{L}$$

$v \frac{\partial u}{\partial y}, w \frac{\partial u}{\partial z}$ 도 동일한 요령으로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(p^* \rho U^2)}{\partial(x^* L)} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} \cdot \frac{U^2}{L} \\
 v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{L \cdot U}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial(x^* L)} \left(\frac{\partial(u^* U)}{\partial(x^* L)} \right) \\
 &= \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{U^2}{L}
 \end{aligned} \tag{1-2}$$

$v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ 도 같은 요령으로 정리할 수 있다.

식(1.2)를 식(1.1)에 대입하여 정리하면 각 항마다 (U^2/L)은 공통으로 존재한다. 편의상 *를 없애고 정리하면 다음과 같이 표기된다.

$$\mathbf{x} : \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

\mathbf{y} : 동일한 요령으로 정리할 수 있다 (1-3)

\mathbf{z} : 동일한 요령으로 정리할 수 있다.

상기의 식에서 **Re**수가 매우 중요하다. 즉, ρ 또는 ν 의 값에 관계없이 **Re**수만으로 유동특성이 결정된다.

즉, 유동장내의 물체가 기하학적으로 상사이며, 같은 **Re**수의 경우에는 같은 해를 얻을 수가 있다. ➡ **Reynolds' law of similarity**

식(1.3)으로 얻은 데이터는 무차원화된 데이터이다. 따라서 다음과 같은 공력계수의 산출에 편리하게 이용될 수가 있다.

예) 압력계수 $C_p = (p - p_\infty) \frac{1}{2} \rho U^2$

만일, $p_\infty = 0$ 이면 $C_p = -2p^*$ 의 관계가 성립되어 계산된 압력 값으로부터 무차원 압력계수가 바로 계산될 수 있다.

또한, 편의상, 대표속도 U 를 1로, 대표길이 L 을 1로 할 경우에는 Re 수는 동점성계수 ν 의 역수로만 표현된다. 따라서, 식(1.3)의 Re 수 계산시에 편리하게 대처할 수가 있다.

1.2 Taylor Series Expansion

(a) $\mathbf{X} = \mathbf{a}$ 에 관한 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 의 테일러 급수 전개식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + f(a)'(x-a) + \frac{f(a)''(x-a)^2}{2!} \\ & + \frac{f(a)'''(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} \end{aligned} \quad (1-4)$$

차분식에서 예를 들면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 f_{i+1,j} &= f_{i,j} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} (x_{i+1,j} - x_{i,j}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} (x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + \dots \\
 &= f_{i,j} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{i,j} \Delta x^3 \\
 &\quad + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_{i,j} \Delta x^4 + O(\Delta x^5)
 \end{aligned} \tag{1-5}$$

$$\begin{aligned}
 f_{i-1,j} &= f_{i,j} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{i,j} \Delta x^3 \\
 &\quad + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_{i,j} \Delta x^4 + O(\Delta x^5)
 \end{aligned} \tag{1-6}$$

$$\begin{aligned}
 u_{i-2,j} = & u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} (-2\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(-2\Delta x)^2}{2!} \\
 & + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(-2\Delta x)^3}{3!} + \dots
 \end{aligned} \tag{1-7}$$

$$\begin{aligned}
 u_{i-1,j} = & u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} (-\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^3}{3!} + \dots
 \end{aligned} \tag{1-8}$$

(b) $\mathbf{x}=\mathbf{a}, \mathbf{y}=\mathbf{b}$ 에 관한 $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 의 Taylor 급수전개식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\
 & + \frac{1}{2!} [f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) \\
 & + f_{yy}(a, b)(y - b)^2] + \dots
 \end{aligned} \tag{1-9}$$

1.3 차분표기

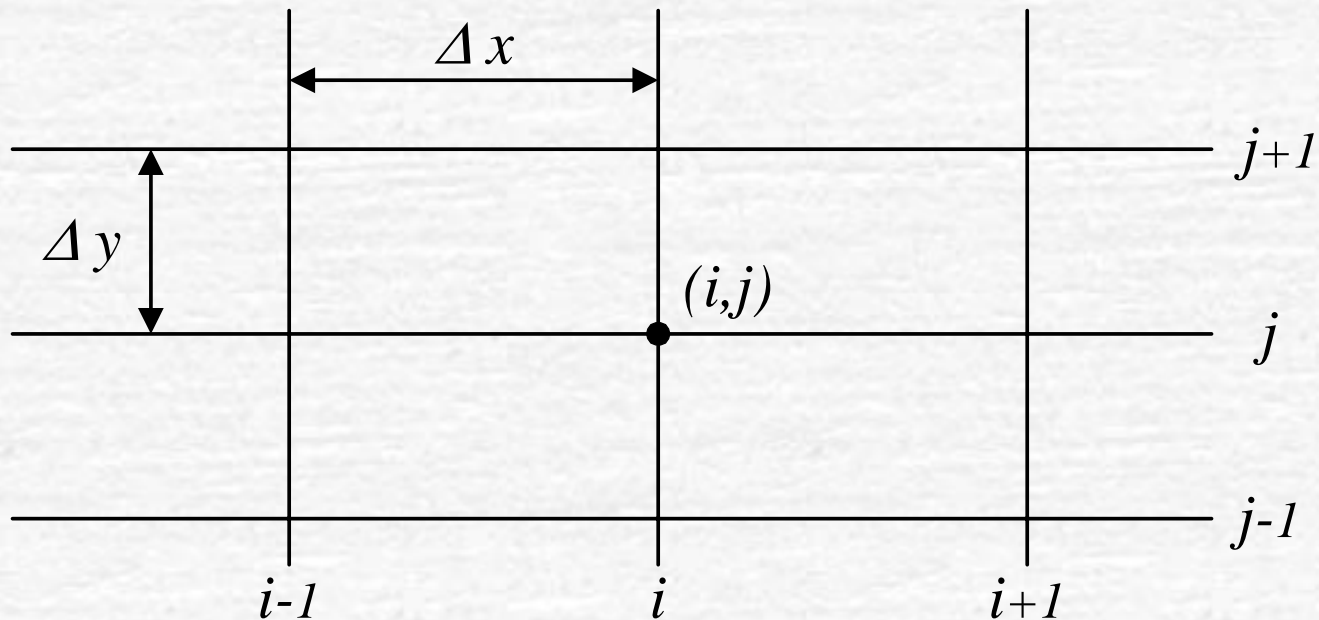


Fig. 1 4 변형 mesh 형상

(a) 1계 도함수 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j}$ = 의 전진 및 후퇴차분식

전진차분은 식(1.5)를 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j}$ =에 관하여 정리하면 구해진다.

즉,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} \Delta x + \text{고차항}(HOT)$$

$$= \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \longrightarrow \text{1차의 정확도(degree of accuracy)}$$

$\longrightarrow \Delta x$ 이상의 항을 모두 모은 것을 의미함

같은 요령으로, 후퇴차분 근사는 식(1.6)을 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j}$ 에 관해 정리하면 구해진다.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

(b) 중심차분근사 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 의 경우를 구해보기로 한다. 식(1.5)에서 식(1.6)을 감산하면,

$$f_{i+1,j} - f_{i-1,j} = 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{i,j} \Delta x^3 + \text{고차항}(HOT)$$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j}$ 에 관하여 정리하면,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{i,j} \Delta x^2 + \text{고차항}(HOT) \\ &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \rightarrow 2\text{차의 정확도} \end{aligned} \quad (1-12)$$

다음으로 확산항의 차분근사에 적용되는 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 를 중심차분으로 근사식을 구해보기로 한다. 이를 위하여, 식(1.5)에 식(1.6)을 더하면

$$f_{i+1,j} - f_{i-1,j} = 2f_{i,j} + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_{i,j} \Delta x^4 + HOT$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (1-13)$$

위와 같이 되어 2차정도를 갖는 중심차분식으로 귀착된다.

2.1 移動性(transportive property)

정보의 1방향으로 흐름을 나타내며, 미소교란성분인 **perturbation**(攝動)의 영향이 흐름방향만으로 대류에 의해 이동되어 하류에 전파됨을 의미한다. 많은 차분법, 특히 중심차분은 이와 같은 이동성이 결여됨으로서 순수한 수치기법의 관점에서는 고정도의 차분식이 얻어질 수가 있으나, 실제유동의 적용에서 곤란한 경우가 많다.

2.2 풍상차분 근사

흐름의 방향을 고려하여, 흐름의 방향이 正 (+)이면 후퇴차분, 不 (-)이면 전진차분을 취한다.

즉, 차분근사식이 늘 흐름의 上流(upstream) 또는 風上(upwind)을 고려하여 정의됨으로서 이동성을 갖추었다고 볼 수 있다.

2.3 1次元 비점성 渦度이동방정식으로의 적용

1次元 비점성 渦度이동방정식은 다음의 식으로 정의된다.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u \xi}{\partial x} = 0 \quad (2-1)$$

시간항에 관하여는 전진차분을 취하면,

$$\begin{aligned}\frac{\xi_i^{n+1} - \xi_i^n}{\Delta t} &= \frac{u\xi_i^n - u\xi_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (u > 0) \\ &= \frac{u\xi_{i+1}^n - u\xi_i^n}{\Delta x} \quad (u < 0)\end{aligned}\tag{2-2}$$

으로 표현된다.

이 경우에 이동성을 소유하는 차분스킴(즉, 풍상차분식)에서는 섭동이 흐름에 따라서 상류로부터 하류쪽으로 전파한다는 점에서는 그 물리적인 의미가 정확하다. 그러나 절단오차(truncation error)의 면에서는 일반적으로 중심차분근사보다 불리한 점이 지적된다.

2.4 인공점성(artificial viscosity)

인공점성은 대류항의 차분식에 포함된 점성항으로부터 발생하며, **Hirt**의 안정성해석에 의해 구해진다. 이것은 유한차분방정식의 각 항을 다시 **Taylor**급수 전개한 다음, 연속체에 대한 **NS** 편미분 방정식에 대입하여 정리할 때에 추가되는 2계도함수의 항을 의미한다.

예) $\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y}$ 의 대류항을 $\tilde{u} > 0$, $\tilde{v} > 0$ 에 대하여 편측

풍상차분을 행하면 식2.2의 원리가 적용되어 아래와 같이 정리된다.

여기에서 속도성분의 는 선형화된 값을 의미한다.

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \tilde{u} \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \tilde{v} \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \underbrace{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}_{\sim} + C_x \underbrace{(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n)}_{\sim} + C_y (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n) \right\} \end{aligned} \quad (2-3)$$

단, $C_x = \frac{u \Delta t}{\Delta x}$, $C_y = \frac{v \Delta t}{\Delta y}$ 로 정의된다. (2-4)

상기의 식에서 나타나는 변수에 대하여 다음과 같이 Taylor 전개를 행한다.

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j}^n + O(\Delta t^3) \quad (2-5)$$

$$u_{i-1,j}^n = u_{i,j}^n + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j}^n - O(\Delta x^3) \quad (2-6)$$

$$u_{i,j-1}^n = u_{i,j}^n + \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j}^n - O(\Delta y^3) \quad (2-7)$$

식(2.3)에 식(2.5), 식(2.6) 및 식(2.7)을 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} = & \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j}^n + \frac{\Delta x}{\Delta t} C_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j}^n + \frac{\Delta y}{\Delta t} C_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j}^n \\ & - \frac{C_x \Delta x^2}{2\Delta t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{C_y \Delta y^2}{2\Delta t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2) \end{aligned} \quad (2-8)$$

여기에서 편의상, 첨자 (i, j, n)을 생략하고 식(2.4)의 관계를 고려하여 정리하면,

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2-9)$$

$$-\frac{1}{2} \tilde{u} \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \tilde{v} \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$$

이 되고, 여기에서 편의상 $\frac{Du}{Dt} = 0$ 을 가정하면 식(2.10)과 같
은 식이 얻어진다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\tilde{u} \frac{\partial u}{\partial x} - \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2-10)$$

식(2.10)의 양변을 t 에 관하여 미분하여, 식(2.10)을 다시 대입하면,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \tilde{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 &= -\tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\tilde{u} \frac{\partial u}{\partial x} - \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \tilde{v} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\tilde{u} \frac{\partial u}{\partial x} - \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2-11) \\
 &= \tilde{u}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{v}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\tilde{u}\tilde{v} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

식(2.11)의 $2\tilde{u}\tilde{v}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 항을 생략하고, 식(2.9)에 대입하면,

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial u}{\partial y} - \alpha_{ex}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha_{ey}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2-12)$$

와 같이 정리된다. 이때의 $\alpha_{ex} = \frac{1}{2}\tilde{u}\Delta x(1-C_x)$ 및 $\alpha_{ey} = \frac{1}{2}\tilde{v}\Delta y(1-C_y)$

는 $\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial u}{\partial y}$ 의 차분식을 편측상류차분으로 근사하였

을 때에 부가적으로 발생하고 있음을 알 수가 있다. 이 경우에 점성항과 같은 2계도함수의 식에 부가 됨으로써 이를 수치적인 확산 또는 인공 점성항으로 규정한다.

따라서, 대류항의 차분근사식을 행하기 위하여 지금까지 여러 가지의 기법(일반적으로 **scheme**으로 부름)이 제안되어 왔으며, 이들 식에 대하여 **Taylor**전개를 행하여 보면, 반드시 원래의 점성항에 부가되는 새로운 값이 나타난다. 이 값을 인공점성으로 정의하여 수치적으로 발생하는 점성계수의 크기를 판단하게 하며, 이 값은 동시에 **truncation error**(절단오차)를 의미하고 있음으로서 차분정도를 나타내고 있다. 따라서, 정도가 높은 차분 **scheme**은 이와 같은 인공점성항의 값이 작다.

2.5 상류차분의 결합공식

A 및 **B**를 주류의 속도방향을 고려하여 제안된 상류차분식이라고 하면 이들 식을 결합하여 보다 간편하게 나타낼 수가 있다. 식(2.13)은 이 때의 결합방법을 나타내고 있다. 공개된 소스코드를 보면 상류차분식에 관하여는 대부분이 이러한 결합방법으로 표현되어 있음을 알 수가 있다.

$$\begin{array}{l} u \cdot A, \quad u > 0 \\ u \cdot B, \quad u < 0 \end{array} \quad u \left(\frac{A+B}{2} \right) + |u| \left(\frac{A-B}{2} \right) \quad (2-13)$$

식(2.13)을 일차정도 **upwind** 차분스킴에 적용하여 인공점성값 및 **truncation error**를 나타내보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 u \left(\frac{\partial \phi}{\Delta x} \right)_i &\approx U \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \right) & U > 0 \\
 &\approx U \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \right) & U < 0 \\
 &\approx U \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \right) - |U| \left(\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{2\Delta x} \right) & (2-14) \\
 &\approx U \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i \Delta x^2 + \dots - \frac{1|U|}{2U} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i \Delta x + \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right)_i \Delta x^3 + \dots \right\} \right]
 \end{aligned}$$

식(2.14)에서 점성항에 부가될 수 있는 2계도함수의 부가식이 Δx 이며 이 항은 오차의 관점에서 선도항(leading term)이 되어 결국 1차정도의 차분식임을 알 수가 있다. 중심차분의 경우에는 식(1.12)와 같다. 이 식을 살펴보면 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 의 인공점성항이 나타나지 않고 있다. 따라서 선도항의 오차는 2차정도를 유지하고 있으며, 인공점성이 발생하지 않음으로써 외견상 우수한 차분식으로 보여진다. 그러나, 실제로 이 식을 적용하여 보면 수치적인 불안정성이 크게 나타남으로써 수치해석에서는 잘 이용되지 않고 있다.

3.1 Courant 수

Courant수의 정의는 1차원의 경우에 다음과 같이 정의된다.

$$C = u\Delta t / \Delta x$$

(단, Δx : 공간 mesh 폭, Δt : 시간 step, u : x방향의 속도)

이 식에서 $C < 1$ 일 때에 안정성이 확보됨을 의미하며, $C < 1$ 의 의미는 1회의 시간 step동안 변수(예를 들어, 와도 ω)가 이동하는 거리 $u\Delta t$ 는 이산화된 공간 간격인 Δx 를 넘을 수 없다는 뜻을 나타낸다.

← Courant수의 물리적 의미

3.2 Neumann의 안정성 해석기법

차분방정식의 해를 유한개수의 **Fourier** 급수로 전개하여 각각의 모드, 또는 성분의 진폭이 증대하는가 감쇄하는가를 독립적으로 음미하여, 차분식이 안정 또는 불안정한가를 판별하는 기법이다. 일반적으로 차분식이 선형적으로 해석될 수 있음을 전제로 하고 있으며 따라서 비선형차분식의 경우에는 선형식으로서의 가정이 필요하다. 구체적인 것은 전문서를 참고하기로 한다.

3.3 확산수

확산수는 아래와 같이 정의된다.

$$d = a \Delta t / \Delta x^2$$

이 식에서 α 는 $(1/\text{Re})$ 를 의미하며 대표길이 및 대표속도를 1로 한 경우의 동점성계수 ν 에 해당한다. 이 값은 “운동량의 확산이 1회의 시간 step간에 하나의 격자 폭을 넘을 수 없다.”는 물리적인 조건을 나타내고 있으며 앞에서의 **Courant**수와 함께 차분식의 안정성을 판별하는 식으로서 유용하게 사용될 수가 있다.

예를 들어,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (u \xi)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

FTCS(Forward-Time,Centered-Space) 차분스킴은

다음의 식으로 정리가 된다.

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n - \frac{C}{2} (\xi_{i+1}^n - \xi_{i-1}^n) + d (\xi_{i+1}^n - 2\xi_i^n + \xi_{i-1}^n) \quad (3-1)$$

단, 이 식에서 나타나는 **C** 및 **d**는 다음과 같이 정의된다.

$$C = u\Delta t / \Delta x$$

$$d = a\Delta t / \Delta x^2$$

식(3.1)에 대하여 Neumann의 안정성해석에 의해 구해보면 다음과 같이 구해진다.

$$-2 \leq C + 2d \leq 1$$

이 식을 시간간격 Δt 에 대하여 정리하면,

$$\Delta t \leq \frac{2}{\frac{2\alpha}{\Delta x^2} + \frac{u}{\Delta x}} \quad (3-2)$$

로 표현되어 이 식은 비정상 계산시에 매 싸이클마다의 안정된 계산을 위한 시간간격의 설정조건에 이용된다.

같은 요령으로 2차원의 경우에 대류항에 편측차분한 적용하였을 때의 Courant조건과 확산수조건을 동시에 만족하는 시간간격의 조건은 다음과 같이 정리된다.

$$\Delta t \leq \frac{2}{2\alpha \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) + \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y}} \quad (3-3)$$

4. 차분스킴의 보존형 표시

4.1 보존성의 물리적 의미

어느 물리량의 시간적인 증감은 R 의 경계 ∂R 을 통해 유입하는 정미의 대류이동유속과, 같은 R 의 경계를 통해 들어오는 정미의 확산유속의 합으로 표시되어 식(4.1)과 같이 표기된다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v} \zeta) + \alpha^2 \zeta \quad (4-1)$$

이 식의 양변을 영역 R 에 관해 적분하면,

$$\int_R \frac{\partial \zeta}{\partial t} dR = -\int_R \nabla \cdot (\vec{v} \zeta) dR + \int_R \alpha \nabla^2 \zeta dR \quad (4-2)$$

으로 바뀌게 된다. 이 식에 대하여 우변의 제1, 2 항을 Gauss 정리에 의해 고쳐쓰면,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_R \zeta dR = -\int_{\partial R} (\vec{v} \zeta) \cdot \vec{n} ds + \alpha \int_{\partial R} (\nabla \zeta) \cdot \vec{n} ds \quad \text{로 정리된다.}$$

4.2 보존형 표시

비압축성유체에 대하여 연속의 식은

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \text{ 즉, } \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (4-4)$$

으로 나타낸다. 따라서 대류항의 보존형 표기를 이 조건하에서 비보존형으로 바꾸면 아래와 같이 표현된다.

$$\underbrace{\nabla \cdot \vec{v} \zeta}_{\text{보존형}} = \vec{v} \cdot (\nabla \zeta) + \zeta (\nabla \cdot \vec{v}) = \underbrace{\vec{v} \cdot (\nabla \zeta)}_{\text{비보존형}} \quad (\because \nabla \cdot \vec{v} = 0)$$

즉, 물리적으로는 연속의 식을 만족하면 유동의 운동을 지배하는 NS 방정식의 대류항은 보존형과 비보존형의 구분에 관계없음을 의미하며 이와 같은 배경하에서 여러 종류의 차분기법이 제시되어왔다. 그 결과, 지금까지의 많은 수치계산에서 보면, 대개의 경우에 보존성을 갖춘 차분기법이 보다 높은 정도(精度)를 유지하는 것으로 나타나 있다. 대신 보존형의 경우에는 2차정도 이상의 고정도의 차분식이 얻어지기 어려우며, 상류차분식의 표현에 부적합한 것으로 보고되어 있다.

5. MAC(또는 SOLA)법에서의 차분근사

5.1 Staggered mesh

이 격자배치는 압력의 바둑판모양발생을 억제 함으로써 차분식의 안정성 확보에 유리하다고 알려져 있으며, **MAC** 및 **SIMPLE**계통에서 즐겨 채택하는 기법이다. 즉, 아래 그림에서와 같이 하나의 격자를 중심으로 중앙에 압력성분을, 좌우에 u 속도성분의 입출입을, 상하에 v 속도성분의 입 출입을 표현 함으로써, 인접하는 격자간의 압력차에 따른 속도성분의 증감을 나타내기에 적합한 변수배치를 가지고 있는 점이 특징이다.

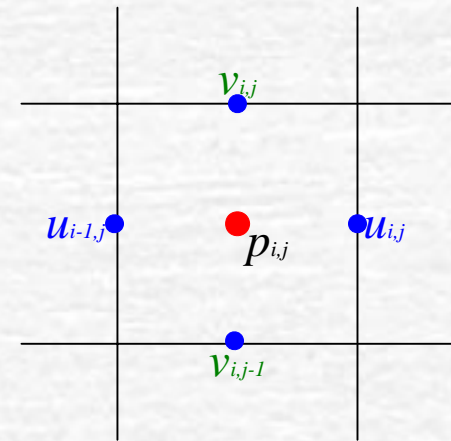


Fig. 2 Staggered grid and variables allocation

5.2 MAC법에서의 중심차분근사

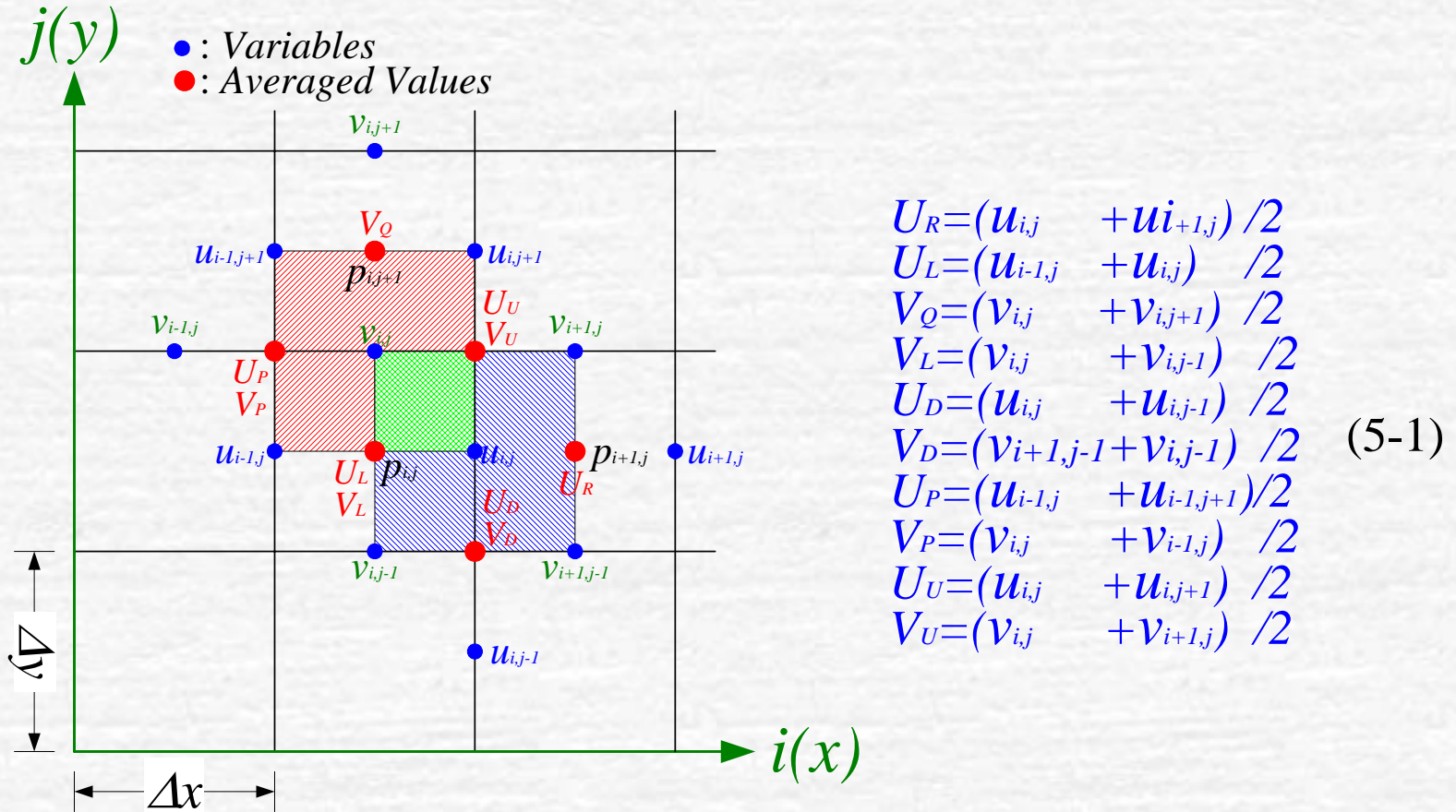


Fig. 3 Distribution of variables at MAC series

그림 3은 등간격의 **staggered grid**(엇갈림격자) 격자배치에서의 변수배치를 나타내고 있다. 외견상 복잡하게 보이나 **u**성분과 **v**성분을 나누어서 표시한 점에 유의하면 쉽게 이해가 된다. 식(5.1)은 이 격자배치에서 필요한 보간값(여기에서는 등간격이므로 단순히 평균값을 취하였음)을 나타내고 있다. 이 값들이 **SOLA** 또는, **MAC**계열의 차분식에 아래와 같이 사용된다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} (U_R^2 - U_L^2), \quad \dots \quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \quad (5-2)$$

$$\frac{\partial uv}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y} (U_U V_U - U_D V_D), \quad \dots \quad + \frac{\Delta y^2}{4} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots \quad (5-3)$$

$$\frac{\partial uv}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} (U_U V_U - U_P V_P), \quad \dots \quad \frac{\partial v^2}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y} (V_Q^2 - V_L^2) \quad (5-4), (5-5)$$

5.3 Partial Donor Cell 차분식(2차정도 보존형)상류차분식

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{\partial u \cdot u}{\partial x} = (U_R \cdot \langle U_R \rangle - U_L \cdot \langle U_L \rangle) / \Delta x \quad (5-6)$$

$$\begin{aligned} \langle U_R \rangle &= U_{i,j}, \quad \langle U_L \rangle = U_{i-1,j}, \quad \text{if } U_R \geq 0, U_L \geq 0 \\ \langle U_R \rangle &= U_{i+1,j}, \quad \langle U_L \rangle = U_{i,j}, \quad \text{if } U_R < 0, U_L < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta y} (V_U u_{i,j}, -V_D u_{i,j-1}), \quad \text{if } V_U \geq 0, V_D \geq 0 \\ &= \frac{1}{\Delta y} (V_U u_{i,j+1}, -V_D u_{i,j}), \quad \text{if } V_U < 0, V_D < 0 \end{aligned} \quad (5-7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta x} (U_U v_{i,j}, -U_P v_{i-1,j}), \quad \text{if } U_U \geq 0, U_P \geq 0 \\ &= \frac{1}{\Delta x} (U_U v_{i+1,j}, -U_P v_{i,j}), \quad \text{if } U_U < 0, U_P < 0 \end{aligned} \quad (5-8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta y} (V_Q v_{i,j}, -V_L v_{i,j-1}), \quad \text{if } V_Q \geq 0, V_L \geq 0 \\ &= \frac{1}{\Delta y} (V_Q v_{i,j+1}, -V_L v_{i,j}), \quad \text{if } V_Q < 0, V_L < 0 \end{aligned} \quad (5-9)$$

5.4 압력항(중심차분)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} (p_{i+1,j} - p_{i,j}), \quad (5-10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y} (p_{i,j+1} - p_{i,j}) \quad (5-11)$$

5.5 점성항(중심차분근사)

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \nu \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \quad (5-12)$$

$$\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \nu \left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \quad (5-13)$$

6.1 가중계수(weighting factor)의 도입

수치불안정성을 억제하기 위하여 **Partial Donor-Cell** 항을 도입 함으로서 보존형의 중심차분식과 동시에 차분식을 구성한다. 따라서, 레이놀즈수 및 유동장의 특성에 따라서 이와 같은 두 차분식의 비율을 조정 함으로서 해의 정확도 및 수치 안정성을 확보할 수 있게 된다. 아래와 같은 α 값을 가중계수로 채택한다. $\alpha=1$ 일 경우에는 차분식 전체가 보존형 상류차분식인 **Partial Donor-Cell(PDC)**만으로 구성되며 $\alpha=0$ 일 경우에는 보존형의 중심차분만으로 되어 해의 정도가 높아지게 된다. 경험적으로 2차원의 각주유동장에 대하여 $Re=102$ 의 경우에는 0.4까지, $Re=103$ 의 경우에는 0.45, $Re=104$ 이상에서는 0.5의 값을 부여한 계산에서 수치불안정성이 나타나지 않았다(참고문헌, 이영호, 2차원각주의 비정상 공력특성(SOLA스킴의 재평가), 한국박용기관 학회지 제14권 제2호, 1990, pp. 148-165).

대류항차분근사 $(1-\alpha)\cdot$ 중심차분 + $\alpha\cdot$ 파셜도나셀 차분식 (6-1)

식(6.1)은 SOLA의 대류항에서 $\partial(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})/\partial\mathbf{x}$ 의 예를 들어 보면 아래와 같이 정리된다.

$$FUX = \frac{\partial u \cdot u}{\partial x} = \left[(1-a) \frac{u_R^2 - u_L^2}{\Delta x} + a \frac{u_R \langle u_R \rangle - u_L \langle u_L \rangle}{\Delta x} \right] \quad (6-2)$$

...centered... ...partial donor...

a : weighting factor

상기의 식에서 PDC항은 속도의 정부에 따라서 다음과 같이 구분된다.

$$\begin{aligned}
u_R \langle u_R \rangle - u_L \langle u_L \rangle &= u_R \cdot u_{i,j} - u_L \cdot u_{i-1,j} && \text{if } u_R \geq 0, u_L \geq 0 \\
&= u_R \cdot u_{i+1,j} - u_L \cdot u_{i,j} && \text{if } u_R < 0, u_L < 0 \\
&= u_R \cdot \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} + |u_R| \cdot \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{2} \\
&\quad - \left(u_L \cdot \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} + |u_L| \cdot \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{2} \right) \\
&= u_R \cdot \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} - u_L \cdot \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} \\
&\quad + \left(|u_R| \cdot \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{2} - |u_L| \cdot \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{2} \right) \\
&= (u_R^2 - u_L^2) + \left(|u_R| \cdot \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{2} - |u_L| \cdot \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{2} \right)
\end{aligned} \tag{6-3}$$

SOLA에서 FUX는 다음과 같이 결합된다.

$$\begin{aligned}
 FUX &= (1-a) \frac{(u_R^2 - u_L^2)}{\Delta x} + a \frac{(u_R^2 - u_L^2)}{\Delta x} \\
 &\quad + \frac{a}{\Delta x} \left(|u_R| \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{2} - |u_L| \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4\Delta x} \left[(u_{i,j} + u_{i+1,j})^2 - (u_{i-1,j} + u_{i,j})^2 \right. \\
 &\quad \left. + a |u_{i,j} + u_{i+1,j}| \cdot (u_{i,j} - u_{i+1,j}) \right. \\
 &\quad \left. - a |u_{i-1,j} + u_{i,j}| \cdot (u_{i-1,j} - u_{i,j}) \right]
 \end{aligned} \tag{6-4}$$

6.2 중심차분에 의한 인공점성

등간격 격자배치에서 SOLA의 대류항 중 보존형의 중심차분식에 대한 안정성 해석 결과는 식(6.5)와 같이 정리된다. (Chan & Street, A computer study of finite-amplitude water waves, J.Comp. Phys. Vol.6, 1970, pp.68.)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - g_x &= \left(v - \frac{\Delta t}{2} u^2 - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
 &+ \left(v - \frac{\Delta t}{2} v^2 - \frac{\Delta y^2}{4} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}
 \end{aligned}
 \tag{6-5}$$

한편 PDC 하에 대한 Hirt의 안정성해석 결과는 과거의 문헌에 보고된 바 없으며 이것은 절대값 항내의 변수가 2종류로서 이로 인한 식의 정리가 간단하게 이루어지지 않기 때문으로 보여진다. 또한 부등간격의 격자배치 상에서의 SOLA차분식의 안정성해석결과가 보고되어 있으나 이 경우에도 중심차분식에 경우에만 정리가 가능하였음을 밝히고 있다. (이영호 외, 대한기계학회 전산유체역학분과회 논문집, 1994, pp149-167).

7.1 벽면 경계조건

slip condition(반사의 법칙, 鏡像의 원리)

$$v_w = -v_{w+1}$$

$$f_w = f_{w+1} \quad (f = u, \rho, T \text{ etc})$$

no slip condition(부착조건)

$$v_w = -v_{w+1} \rightarrow v_{wall} = v_{w+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(v_w + v_{w+1}) = 0$$

$$u_w = -u_{w+1} \rightarrow u_{wall} = u_{w+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_w + u_{w+1}) = 0$$

SOLA에서는 물체경계면에서 **no slip** 조건을 택하고 있으나, 계산기법의 편의상 **slip** 조건을 채택하는 경우도 있다.

7.2 상류경계(유입경계조건)

고정

$$u_{1,j} = U = (\text{고정}), \quad v_{i,j} = 0 \text{ 또는 자동조정(미지수 취급)}$$

외삽

$$u_{1,j} = 2u_{2,j} - u_{3,j}, \quad v_{1,j} = 2v_{2,j} - v_{3,j}$$

SOLA

$$u_{1,j} = U = 1.0, \quad v_{i,j} = 0 \leftarrow \text{고정조건 부여}$$

7.3 하류경계조건(유출경계조건)

외삽

$$u_{M,j} = 2u_{M-1,j} - u_{M-2,j}$$

SOLA

$\nabla V = 0$ 의 **Neumann** 조건 부여 후에, 압력 및 속도의 수정완화에 따른 값을 최종적으로 얻음

7.4 상방경계조건

slip 조건

$$\begin{aligned}u(i, N) &= U (= 1), \\ &= u(i, N - 1)\end{aligned}$$

$$v(i, N - 1) = 0$$

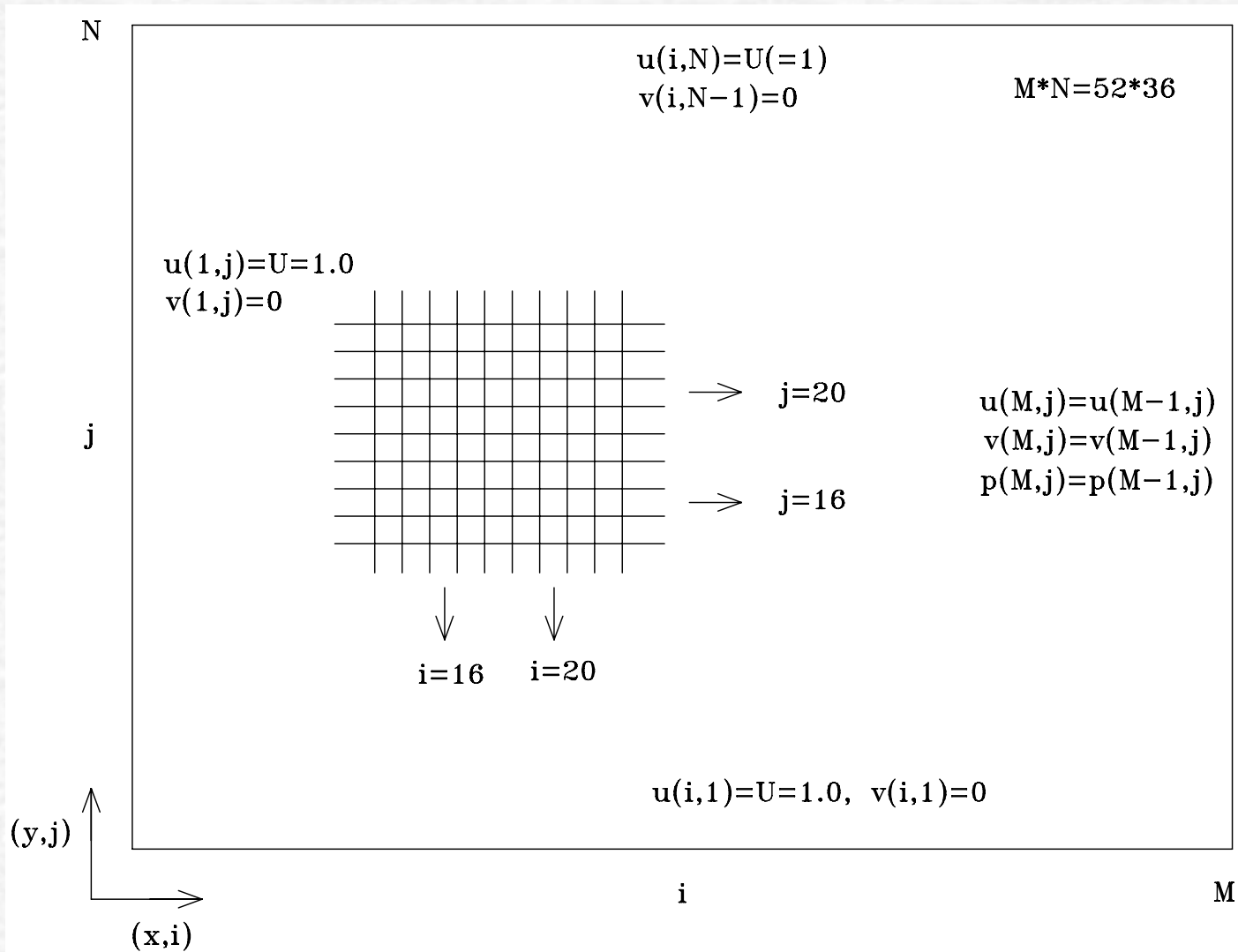
7.5 하방경계조건

slip 조건

$$\begin{aligned}u(i, 1) &= U (= 1), \\ &= u(i, 2)\end{aligned}$$

$$v(i, 1) = 0$$

8. Karman Vortex Simulation



8.1 수치안정조건

Courant 조건 $\delta t < \min\left(\frac{x}{|u|}, \frac{y}{|u|}\right)_{ij}$ (8-1)

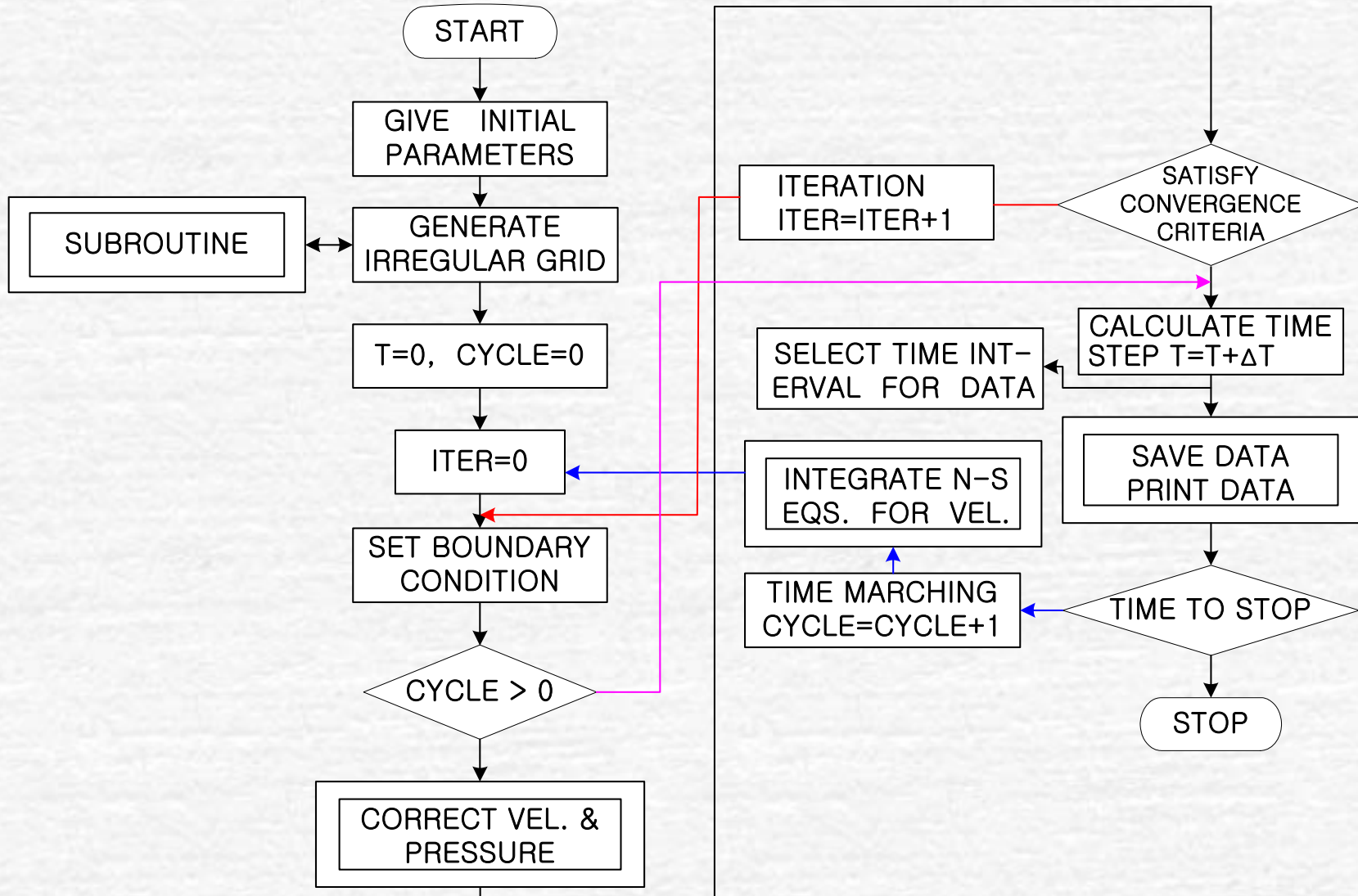
확산수 조건 $\delta t < \frac{v}{2} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)_{ij}$

8.2 가속계수(SOR 法, 등간격상)

$$\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad \zeta = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{I-1}\right) + \beta^2 \cos\left(\frac{\pi}{J-1}\right)}{1 + \beta^2} \right]^2$$

$$w_0 = 2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \zeta}}{\zeta} \right) \quad (8-2)$$

9. Flow Chart of SOLA





10. Solution Algorithm

이산화된 영역을 통과하는 비압축성의 일정한 특성을 가진 흐름을 모델링할 때의 문제는 원시변수 u, v, p 에 대한 대수연립방정식의 해로 축소되어 왔다. 대수문제를 푸는데 있어 이용할 수 있는 다양한 기법들이 지금까지 밝혀져 왔으나, 이런 방정식의 해는 그렇게 간단하지는 않다. 역행렬 기법과 같은 직접적인 접근 방법들은 방정식의 비선형성과 대부분의 흐름 문제를 모델링 하기에 필요로 하는 셀의 수가 많기 때문에 어려움에 직면하게 된다. 반복 수법들이 비선형문제를 풀기 위하여 사용될 수 있다. 그러나 사용자가 그 수법과 시스템을 잘 이해하고 있지 않다면 수렴하는데 있어 난관에 직면하게 된다. 전반적인(total) 문제는 압력이 연속방정식에서 변수로서 나타나지 않는다는 사실 때문에 복잡하게 된다.

비록 이 문제(압력이 없음)가 처음에는 문제 거리가 되지 않을 듯이 보일 지라도, - 단지 약간의 미지수가 전형적으로 방정식의 어떠한 계 (**system**)의 각 방정식에서 나타난다 - 이러한 특별한 문제를 푸는데 있어 성공적으로 사용될 수 있는 수치적 도구들을 엄격하게 제한하는 것은 중요한 특징이 된다.

압력수정방정식 이라고 알려진 많은 해법절차 중에서 한가지 해법을 제시하는 것에 초점을 맞춘다. 해의 절차가 다른 공식들, 다름 아닌 먼저장에서 제시됐던 공식들에 적용할 수 있기 때문에 우리는 그것을 보편적인 방법, 즉 비 유한체적법과 무관하게 전개해야 한다. 평면2차원, 비정상, 비압축성흐름에 대한 지배 차분방정식인 식 (5.24), (5.63) 그리고 (5.64)를 특수화시킴으로써 시작하고자 한다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y$$

앞장에서 소개한 시간항에 대하여 단순 미분하면, 운동량의 방정식을 다음과 같이 재 기술할 수 있다.

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

새로운 시간-레벨에 대해 풀면, 속도들은 다음과 같다.

$$u^{n+1} = u^n - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \delta t \left[\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (5-97)$$

$$v^{n+1} = v^n - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \delta t \left[\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad (5-98)$$

만약 우리가 모든 우변항 들을 시간-레벨 n 에서 계산 한다면, 두개의 방정식과 3개의 미지수(u, v, p)를 갖는 양해(**explicit**)식을 얻는다. 세번째 방정식은 연속방정식이다. 우리는 각 시간-레벨에서 계산된 속도장이 연속성을 만족하도록 연속성이 새로운 시간-레벨에서 보증 되도록 해야 한다. 다시 말해서,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+1} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{n+1} = 0 \quad (5-99)$$

여러분은 이 장 소개부분에서 언급된 어려움을 이제 알 수 있다. 압력은 연속 방정식에서 변수로서 나타나지 않는다. 그러므로 우리는 명백히 p^{n+1} 을 계산 할 방법이 없다. 압력수정 알고리즘에 기초를 둔 해결 절차의 핵심은 압력이 질량보존을 나타내는 방정식에서 변수로서 나타나도록 연속방정식을 다시 쓰는 것이다.

우리가 운동량 방정식 (5.97), (5.98)을 완전 양해법을 사용하여 푼다면, 새로운 시간 레벨 속도들($\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}^{n+1}$)은 연속성을 반드시 만족하지 않는다. 왜냐하면 우리는 여전히 옛 시간 압력장을 사용하고 있기 때문이다. 그러므로 우리는 운동량 방정식에 의해 생성된 속도들이 새로운 시간 레벨에서 연속성을 만족시키도록, 옛 시간 레벨로부터 새로운 시간까지의 압력장을 수정하기 위하여 연속성을 사용하고자 한다. 우리는 압력구배 항들의 양해 계산을 사용하여 운동량 방정식을 다시 쓴다.

$$u^{n+1} = u^n - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^{n+1} + \delta t \left[v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]^n \quad (5-100)$$

$$v^{n+1} = v^n - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^{n+1} + \delta t \left[v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]^n \quad (5-101)$$

옛 시간 레벨로부터 새로운 시간 레벨까지의 압력을 "수정"하는데 대한 방정식으로서 연속성을 재술하는 목적을 다시 상기 하면서, 우리는 압력을 옛 시간 레벨 + "수정" ($\Delta p \equiv p^{n+1} - p^n$)로 분할한다. 이리하여,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{n+1} &= \frac{\partial(p^{n+1} - p^n + p^n)}{\partial x} = \frac{\partial(p^{n+1} - p^n)}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^n \\ &= \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^n \end{aligned} \quad (5-102)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{n+1} = \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^n \quad (5-103)$$

압력구배에 대한 공식을 사용하여 다음의 용어를 정의한다.

$$Q_x^n = \frac{\delta t}{\rho} \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g_x - \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]^n \quad (5-104)$$

$$Q_y^n = \frac{\delta t}{\rho} \left[-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g_y - \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]^n \quad (5-105)$$

그리고 나서 우리는 운동량방정식을 다시 쓴다.

$$u^{n+1} = u^n - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial \Delta p}{\partial x} + Q_x^n \quad (5-106)$$

$$v^{n+1} = v^n - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial \Delta p}{\partial y} + Q_y^n \quad (5-107)$$

새로운 시간 레벨들에 대한 표현들을 연속 방정식으로 대체한다. 식 (5.106)을 x 에 대해, 식 (5.107)을 y 에 대해 각각 미분 하여 더하면 다음식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^n - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right)^n \end{aligned} \quad (5-108)$$

식 (5.108)의 오른쪽 첫번째 항은 단순히 옛 시간에서 표현된 연속의 성질이고 그러므로 0 과 같다. Q항들이 옛 시간 레벨에서 계산되어지기 때문에 그것들은 기지의 값들이다. 시간 레벨 $n+1$ 에서 적용된 질량보존법칙은 이제 다시 쓰여질 수 있다

$$\left(\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial y^2} \right) = \nabla^2 (\Delta p) = \frac{\rho}{\delta t} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right)^n \quad (5-109)$$

이제 연속방정식을 압력수정방정식으로 변환하는데 성공했다. 결과적으로 나타나는 방정식은 프와송 방정식으로 알려진 표준 형태이다. 프와송 방정식은 많은 물리적 진행의 모델링에서 나타난다. 그리고 많은 절차들이 그것을 풀기 위하여 개발되어 왔다. 해를 운동량 방정식으로 대체하여 새로운 시간 레벨까지 속도장을 끌어 올린다. 연속 방정식의 압력수정 형태를 풀기위한 반복절차는 직접적인 프와송 해법보다 컴퓨터적인 원(source)을 더 요구한다. 그 절차는 새로운 시간레벨 속도들의 첫번째 근사를 시작함으로써 시작한다. 원속의 첨자는 반복레벨을 의미한다. 첫 번째의 평가는 $\Delta p = 0$ 와 함께, 양해 운동량 방정식으로부터 계산된다.

$$u^{(1)} = u^n + Q_x^n \quad v^{(1)} = v^n + Q_y^n \quad (5-110), (5-111)$$

새로운 시간레벨 속도들의 개선된 평가를 얻기 위해, 압력수정을 계산하여야만 한다. 운동량 방정식의 양해 부분이 이제 첫번째 평가 속도장으로 끼워 넣어진다는 것을 주목 함으로서 시작한다.

$$u^{(2)} = u^n - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial x} \right)^{(2)} + Q_x^n = u^{(1)} - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial x} \right)^{(2)} \quad (5-112)$$

$$v^{(2)} = v^n - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial y} \right)^{(2)} + Q_y^n = v^{(1)} - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial y} \right)^{(2)} \quad (5-113)$$

두번째 반복의 압력수정에 대해 풀기위해 이런 표현들을 연속의 성질로 대체해야 한다. 식 (5.112)를 x 에 대해, 식 (5.113)를 y 에 대해 미분하여 더하면 다음식이 얻어진다.

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial^2 \Delta p^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial^2 \Delta p^{(2)}}{\partial y^2} \quad (5-114)$$

첫번째 반복 항으로부터 계산된 항들을 모으고, 그 방정식을 표준 프와송 형태로 재배열한다. 속도장의 발산을 표현하기 위해 D 라는 표시를 사용한다.

$$D^{(1)} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} \quad (5-115)$$

그러므로 식 (5.114)는 다음과 같이 된다.

$$D^{(1)} - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \Delta p^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta p^{(2)}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (5-116)$$

$$\nabla^2 (\Delta p^{(2)}) = \frac{\rho}{\delta t} D^{(1)} \quad (5-117)$$

식 (5.117)에서 나타나는 Δp 의 제2계 미분의 간단한 중심차분 근사는 효과적이고도 충분히 정확하다.

$$\begin{aligned}\nabla^2(\Delta p^{(2)}) &= \left(\frac{\partial^2 \Delta p^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta p^{(2)}}{\partial y^2} \right)^{(2)} \\ &\approx \left(\frac{\Delta p_E - 2\Delta p_P + \Delta p_W}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta p_N - 2\Delta p_P + \Delta p_S}{(\Delta y)^2} \right)^{(2)}\end{aligned}\quad (5-118)$$

식(5-118)을 식 (5-117)에 대체하고 재배열하면,

$$-2\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)\Delta p_P^{(2)} + \left(\frac{\Delta p_E + \Delta p_W}{\Delta x^2}\right)^{(2)} + \left(\frac{\Delta p_N + \Delta p_S}{\Delta y^2}\right)^{(2)} = \frac{\rho}{\Delta t} D^{(1)} \quad (5-119)$$

이제는 $\Delta p^{\textcircled{2}}$ 에 대한 계를 풀어야 한다. 모든 항들을 보지하고 있다면, 연립방정식을 풀기 위해 수치적인 절차를 사용해야 한다. 대신, 각각의 반복과 더불어 새로운 시간레벨 압력으로 수렴하게 될 것이라는 것과, 그러므로 압력수정이 0쪽으로 감소할 것이라는 것에 주목한다.

그러므로 식 (5.119)의 왼쪽의 두번째 두개 항들을 무시하고 Δp_p 에 대하여 푼다.

(Patankar p.141, p.144를 참조)

보충설명

Δp_E 는 공간에 대한 차가 아니라, 바로 전 시간스텝과 현 스텝에서의 시간스텝 간의 압력의 차이이다. 이 점에 유의하면 이터레이션이 증가할 수록 Δp_E 는 제로로 감을 알 수 있다.

$$\Delta p_P^{(2)} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{-D^{(1)}}{2\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)} \quad (5-120)$$

식 (5.120)은 새로운 압력수정이 첫번째 최근 반복으로부터의 \mathbf{D} 값에 비례한다는 것을 보여준다. 속도장의 발산 \mathbf{D} 는 순체적 변형율이나 셀로부터의 나오는 순체적 유량율로서 해석되어질 수 있다. (**The divergence of the velocity field, \mathbf{D} , can be interpreted as either the net volumetric strain rate or the net rate of volumetric flow out of the cell).**

연속체는 그 격자로부터의 순 유량이 0 이라는 것을 말해준다. 그렇지 않으면, 질량은 그 격자 내에서 만들어 지거나 소멸되어질 것이다. 이제 압력과 속도장의 두 번 째 반복 근사를 계산한다.

$$p^{(2)} = p^{(1)} + \Delta p^{(2)} \quad (5-121)$$

$$u^{(2)} = u^{(1)} - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial x} \right)^{(2)} \quad (5-122)$$

$$v^{(2)} = v^{(1)} - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial y} \right)^{(2)} \quad (5-123)$$

이 두번 째 반복 속도들은 정확하게 연속의 성질을 만족시키지는 않는다. 그러나, 그 장에서의 총(total) 다이버전스는 첫번째의 반복근사에 비교하면 감소하여 왔을 것이다. 우리는 이제 우리가 두번 째 반복근사를 계산했던 것과 정확히 똑같은 방법으로 세번 째의 반복근사를 계산한다.

$$\Delta p_P^{(3)} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{-D^{(2)}}{2 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)} \quad (5-124)$$

그리고,

$$p^{(3)} = p^{(2)} + \Delta p^{(3)} \quad (5-125)$$

$$u^{(3)} = u^{(2)} - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial x} \right)^{(3)} \quad (5-126)$$

$$v^{(3)} = v^{(2)} - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial y} \right)^{(3)} \quad (5-127)$$

이제 반복패턴은 명확하다. 각각의 반복으로 그 장에서의 발산은 감소할 것이고 마찬가지로 연이는 압력수정도 감소할 것이다. 전형적으로 반복 과정은 각각의 계산격자 내에서 최대 발산이 사용자에게 의해 명시한 오차보다 작을 때까지 반복될 것이다.

$$|D^{(k)}| < tolerance \quad (5-128)$$

이런 조건이 만족 되어지면 이 시간스텝에 대한 계산은 완결된다. 마지막 속도와 압력 장은 출력 (예를 들면 $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{(k)}$, $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{(k)}$, $\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^{(k)}$)로 기록되어 진다. 해법이 계속되어 진다면 기지의 값들은 옛 시간 레벨 값들로 물러날 것이며, 전체적인 과정이 다음의 시간 스텝을 위해 반복될 것이다.

실제적으로 모든 수치적 수법들은 사용자가 한 종류의 혹은 다른 종류의 간격 크기를 선택하길 요구한다. 유동장의 이산화는 격자의 크기 명세를 요구한다. 시간 의존 모델의 해는 시간 스텝 크기의 명세를 요구한다. 모든 그런 선택들은 해의 정확성에 영향을 미치고 또한 수치 해법의 기능에 심각하게 영향을 줄 수도 있다. 어떠한 수법들에 대하여 선택된 간격이 허용할 수 있는 값의 범위를 초과한다면, 그 수치 해법은 불안정하게 되고 의미 있는 해로 수렴에 실패한다. 전 단원에서 서술된 기법은 믿을 만한 해를 얻기 위해 고려되어 져야만 하는 안정성 한계를 가지고 있다. 안정성에 대한 조건을 결정하는데 사용된 분석의 세부사항은 생략한다. 그리고 단지 이해에 도움이 되는 설명에 따른 결과 만을 제시한다.

첫번째의 안정성 기준은 얼마나 빨리 질량이 계산격자를 통하여 대류 (convected)되는가에 관련된다. 안정한 해를 얻기 위해, 타임 스텝 크기는 다음의 한계 아래에 있어야 한다.

$$\delta t \leq \frac{1}{\left| \frac{\delta x}{u} + \frac{\delta y}{v} \right|} \quad (5-129)$$

이 기준은 종종 **Courant-Friedrichs-Lewy(CFL)**조건으로서 언급되며, 유체 입자가 단일계산길이격자보다 작게 단일시간스텝 내에 움직이는 거리를 제한하는 것으로서 해석될 수 있다. 만약 이 조건이 위배된다면, 정보는 격자에 관련된 변수들에 전혀 영향을 미치지 않으면서, 단일스텝시간 안에 계산격자를 완벽하게 뛰어 넘을 정도의 큰 거리로 운반될 수 있다.

두 번 째의 안정성 기준은 점성에 의한 운동량이송에 관련되어 있다. 그 조건은 다음과 같다.

$$\delta t \leq \frac{1}{2\nu} \left| \frac{\delta x^2 \delta y^2}{\delta x^2 + \delta y^2} \right| \quad (5-130)$$

이 기준은 단일시간스텝 내에서 단지 단일격자에 점성작용에 의한 운동량의 이송을 제한하는 것으로서 해석된다. 식 (5.129)와 (5.130)에 의해 결정된 두개 중 보다 작은 제한 타임 스텝이 안정성을 보장하기 위해 δt 상의 상한으로서 수행되어야 한다. 근사 시간스텝을 사용하여 차분 공식과 해의 절차로 안정한 해를 생성한다. 격자크기와 타임스텝크기의 상호작용에 주목해야 한다.

정확한 계산을 얻기 위해 많은 수의 보다 작은 체적을 사용하여 격자들을 세분화한다면, 결과적으로 안정성을 유지하기 위해 시간스텝크기를 감소시켜야 한다. 보다 많은 수의 체적과 보다 작은 타임스텝 양쪽 다 해를 얻기 위해 필요로 하는 컴퓨터 조작의 수를 증가시키기 위해 결합된다.

마지막으로 바로 전 단원에서 제시되었던 방법론의 응용으로서 구동캐비티 흐름의 계산모델을 제시한다. 이 기하학적으로 단순한 흐름은 새로운 알고리즘을 평가하기 위한 실험용으로써 자주 사용된다. 그림 (5.30)에 묘사된 형상은 세 면의 고정 벽과 네 번째 면상에 움직이는 벽에 의해 제한된 공간이다. 명백히 흐름의 경계는 정방형격자로 쉽게 일렬로 나열되어 진다. 그리고 전 단원에서 전개된 경계조건은 이 흐름을 모델링 하는데 있어서 충분하다. 만약 밀도, 점성, 캐비티 길이를 단위 값으로 둔다면, 이 흐름에 대한 레이놀즈 수($R = \rho V L / \mu$)는 평판속도(이 예의 경우는 100)와 같은 값을 갖는다.

흐름을 모델하기 위하여 조잡한 격자를 사용함으로써 해석을 시작한다. 그러한 예비실행의 이점은 그 형상이 정확하게 정의되었는가, 그리고 코드가 적절히 작동되는가를 검증하기 위해서 이다. 그림 (5.31)은 균일한 $5*5$ 격자와 이러한 격자에 대한 코드에 의해서 예측된 속도장과 유동 패턴을 나타낸다. 기초 유동장이 합리적으로 보일지라도, 많은 흐름의 세부사항을 노치고 있다. 이제 점점 더 가늘은 격자를 사용함으로써 수렴에 대한 공부를 시작한다. 해가 더 이상의 격자세분에 대해서 우려할 정도로 변하지 않을 때, 우리는 격자 수에 독립적인 해를 얻게 된다. 그림 (5.32)는 균일한 $20*20$ 격자와 관련된 예측 유동장을 나타낸다. 그림 (5.33)은 균일한 $40*40$ 격자와 예측된 관련 유동장을 나타낸다. 계산모델에 사용된 체적의 수를 4배로 한다는 것은 그 유동장의 해를 심각하게 바꾸지 않는 것으로 나타났으며, 그 해석을 수렴하는 것으로 판단한다.

해의 주요한 특징이 정확한 반면, 사실상 흐름의 몇몇 정교한 세부사항들을 놓쳤다. 미끄럼 판으로부터 떨어진 코너들에 작은 역회전渦들이 있어야 한다. 그것들이 40*40격자에 의해서 잡히지 않았고, 그것들은 아무리 가늘게 격자를 세분하더라도 현재의 식을 사용하여 잡힐 것 같지 않다. 그 범인은 운동량방정식에 있어서의 풍상차분에 의해서 도입된 "인공점성"이다. 이 부가점성은 코너渦들이 우리의 수치해법에서 나타나지 않을 정도로 약한 코너 와를 억제하기에 충분하다. 이 와를 잡기 위해서는 운동량방정식에서 운동량의 흐름을 평가하기 위하여 보다 나은 차분과정을 필요로 한다.

보충설명

점성이 크게 되면 아주 저속의 부분에서는 속도가 거의 zero에 가까울 것이다.

극히 정밀한 세부사항을 얻기 위한 기술했던 해석법의 무능은 그 해석법을 무효하게 할 뿐만 아니라 오히려 **CFD**의 사용에 있어서 조심과 판별력의 필요성을 강조한다. 코너와의 부재는 아마도 평판 위의 항력의 계산에 심각하게 영향을 미치지 않을 것이지만, 캐비티 코너에서의 파편수집(**collection of debris**)에는 확실히 영향을 미칠 것이다. 우리는 제1장에서 서술된 경고까지 완전히 한바퀴 돌아왔다. 이해 없이 사용되어 진다면, 강력한 컴퓨터와 코드들은 인상적으로 보이는 결과들을 발생시킬 수 있다. 그것은 여러분이 풀고자 하는 문제를 위해 부적절하다. 유체역학 기본원칙의 건전한 이해, 그리고 연구 하에 있는 그 문제는 정확한 해가 **CFD**로 부터 얻어진다는 것을 보증해야 한다.

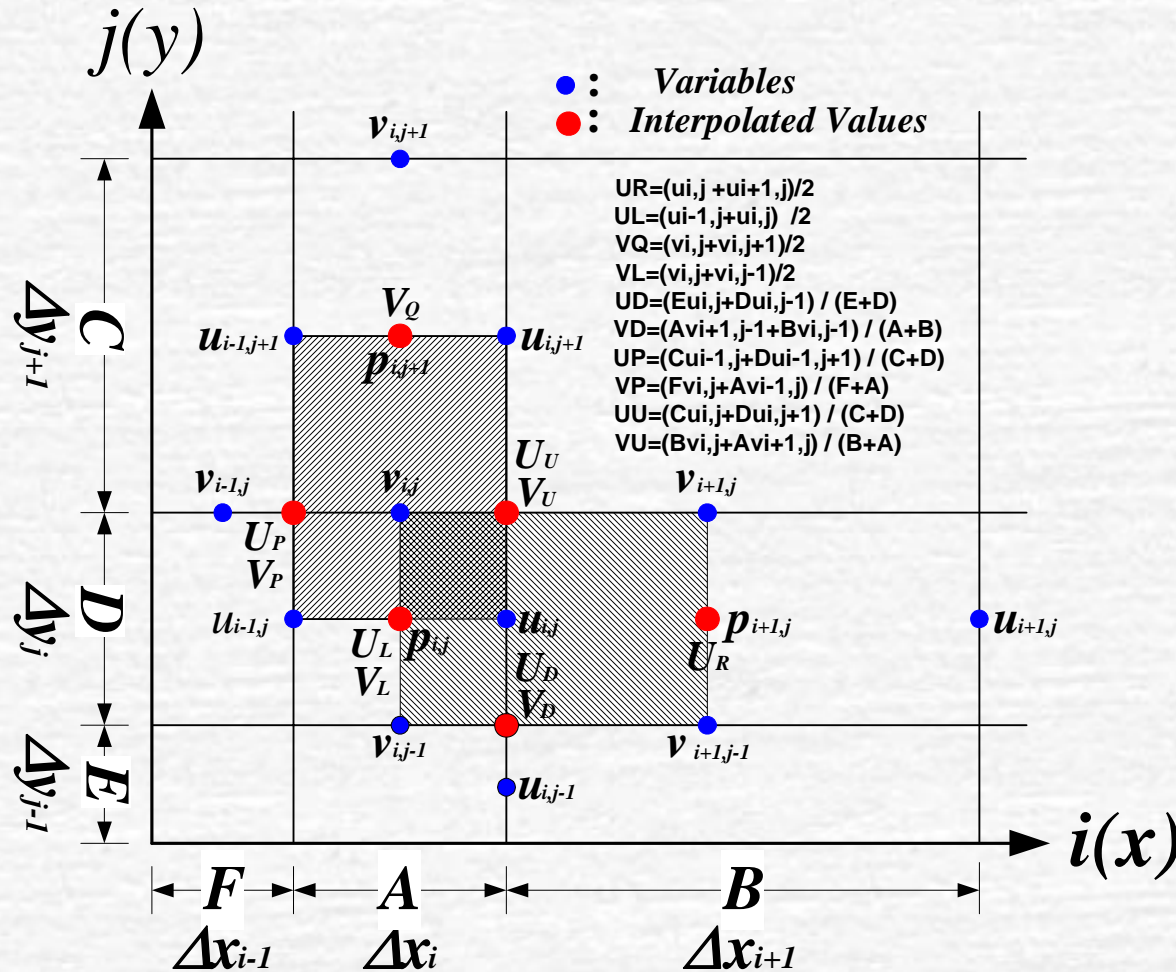


Fig.1 Variables on Irregular Grid Distribution

$a \rightarrow A, b \rightarrow B, c, d, e$ 의 수정작업이 필요함

$$FUX = \frac{\partial(u \cdot x)}{\partial x} = \left\{ (1-\alpha) \frac{2(u_R^2 - u_L^2)}{a+b} + \alpha \cdot PD \right\}$$

$$\therefore PD = \frac{u_R \cdot u_{i,j} - u_L \cdot u_{i-1,j}}{a} \quad \text{if } u_R \geq 0, u_L \geq 0$$

$$= \frac{u_R \cdot u_{i+1,j} - u_L \cdot u_{i,j}}{a} \quad \text{if } u_R < 0, u_L < 0$$

$$= u_R \left(\frac{\frac{u_{i,j}}{a} + \frac{u_{i+1,j}}{b}}{2} \right) + |u_R| \left(\frac{\frac{u_{i,j}}{a} - \frac{u_{i+1,j}}{b}}{2} \right)$$

$$- u_L \left(\frac{\frac{u_{i-1,j}}{a} + \frac{u_{i,j}}{b}}{2} \right) - |u_L| \left(\frac{\frac{u_{i-1,j}}{a} - \frac{u_{i,j}}{b}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (1-\alpha) \frac{(u_R^2 - u_L^2)}{a+b} + \alpha \left\{ u_R \cdot \frac{bu_{i,j} + au_{i+1,j}}{2ab} + |u_R| \cdot \frac{bu_{i,j} - au_{i+1,j}}{2ab} \right. \\
&\quad \left. - u_L \cdot \frac{bu_{i-1,j} + au_{i,j}}{2ab} - |u_L| \cdot \frac{bu_{i-1,j} - au_{i,j}}{2ab} \right\} \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
FUY &= \frac{\partial(v \cdot u)}{\partial x} = \left\{ (1-a) \cdot \frac{v_u \cdot u_u - v_D \cdot u_D}{d} + \alpha \cdot PD \right\} \\
\therefore PD &= \frac{2(v_U \cdot u_{ij} - v_D \cdot u_{i,j-1})}{d+e} \quad \text{if } v_U \geq 0, v_D \geq 0 \\
&= \frac{2(v_U \cdot u_{i,j+1} - v_D \cdot u_{ij})}{c+d} \quad \text{if } v_U < 0, v_D < 0 \quad (10) \\
&= (1-\alpha) \cdot \frac{v_u \cdot u_u - v_D \cdot u_D}{d} + \alpha \left\{ v_U \cdot \left(\frac{u_{ij}}{d+e} + \frac{u_{i+1,j}}{c+d} \right) + \right. \\
&\quad \left. + |v_U| \cdot \left(\frac{u_{ij}}{d+e} - \frac{u_{i+1,j}}{c+d} \right) - v_D \cdot \left(\frac{u_{i,j-1}}{d+e} + \frac{u_{ij}}{c+d} \right) - |v_D| \cdot \left(\frac{u_{i,j-1}}{d+e} - \frac{u_{ij}}{c+d} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 FVX &= \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial x} = \left\{ (1 - \alpha) \cdot \frac{v_u \cdot u_u - v_p \cdot u_p}{A} + \alpha \cdot PD \right\} \\
 \therefore PD &= \frac{2(u_U \cdot v_{ij} - u_p \cdot v_{i-1,j})}{f + a} \quad \text{if } u_U \geq 0, \quad u_p \geq 0 \\
 &= \frac{2(u_U \cdot v_{i+1,j} - u_p \cdot v_{ij})}{a + b} \quad \text{if } u_U < 0, \quad v_p < 0 \\
 &= (1 - \alpha) \cdot \frac{u_u \cdot v_u - u_p \cdot v_p}{A} + \alpha \left\{ u_U \cdot \left(\frac{v_{ij}}{a + f} + \frac{v_{i+1,j}}{a + b} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + |u_U| \cdot \left(\frac{v_{ij}}{a + f} - \frac{v_{i+1,j}}{a + b} \right) - u_p \cdot \left(\frac{v_{i-1,j}}{a + f} + \frac{v_{ij}}{a + b} \right) - |u_p| \cdot \left(\frac{v_{i-1,j}}{a + f} - \frac{v_{ij}}{a + b} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 FVY &= \frac{\partial(v \cdot v)}{\partial y} = \left\{ (1-a) \cdot \frac{2(v_Q^2 - v_L^2)}{c+d} + \alpha \cdot PD \right\} \\
 \therefore PD &= \frac{v_Q \cdot v_{ij} - v_L \cdot v_{i,j-1}}{d} \quad \text{if } v_Q \geq 0, \quad v_L \geq 0 \\
 &= \frac{v_Q \cdot v_{i,j+1} - v_L \cdot v_{ij}}{c} \quad \text{if } v_Q < 0, \quad v_L < 0 \quad (12) \\
 &= (1-\alpha) \cdot \frac{2(v_Q^2 - v_L^2)}{c+d} + \alpha \left\{ v_Q \cdot \frac{cv_{ij} + dv_{i,j+1}}{2cd} + |v_Q| \cdot \frac{cv_{ij} + dv_{i,j+1}}{2cd} \right. \\
 &\quad \left. - v_L \cdot \frac{cv_{i,j-1} + dv_{ij}}{2cd} - |v_L| \cdot \frac{cv_{i,j-1} - dv_{ij}}{2cd} \right\}
 \end{aligned}$$

$$VISX = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$VISY = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Salvadori & Baron

例,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_m = \frac{2}{s(s+1)} \cdot \frac{s \cdot f_{m+1} - (1+s)f_m + f_{m-1}}{\Delta x_{m+1}^2}, \quad s = \Delta x_{m+1} / \Delta x_m \quad (13)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left\{ \frac{2}{a+b} (p_{i,j}^n - p_{i+1,j}^n) + g_x - FUX^n - FUY^n + VISX^n \right\} \quad (14)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \Delta t \left\{ \frac{2}{c+d} (p_{i,j}^n - p_{i+1,j}^n) + g_y - FVX^n - FVY^n + VISY^n \right\} \quad (15)$$